Теорема о четырех вершинах для многоугольника

О.МУСИН

В дифференциальной геометрии широко известна теорема о четырех вершинах. Суть ее состоит в том, что у достаточно гладкой замкнутой выпуклой кривой (овала) функция кривизны имеет по крайней мере четыре экстремума (вершины), т.е. у нее не менее двух локальных максимумов и, соответственно, минимумов. Мы не будем здесь давать строгого определения понятия кривизны; если оно вам неизвестно, то вы без особого ущерба можете пропустить приведенную выше формулировку теоремы и дальнейшие ссылки на непрерывный случай. Дело в том, что, как оказалось, имеется «дискретный» аналог этой теоремы для многоугольника, который вполне понятен школьнику старших классов. Эта теорема полностью согласуется с ее непрерывным аналогом и при незначительных усилиях из теоремы о многоугольнике выводится теорема о кривой. В одном из докладов на заседании Московского математического общества академик В.И.Арнольд назвал теорему о четырех вершинах фундаментальным свойством размерности два.

Теорема о четырех экстремальных вершинах

Рассмотрим выпуклый многоугольник M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. У любой вершины A_i есть два соседа – A_{i-1} и A_{i+1}, если $1 < i < n$, A_2 и A_n для A_1 и, наконец, A_{n-1} и A_1 для A_n. Сопоставим каждой вершине A_i радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами A_i и двумя ее соседями. Обозначим радиус этой окружности через R_i. Мы имеем теперь набор чисел $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Будем называть вершину A_i многоугольника M *локально-минимальной*, если значение соответствующего ей радиуса R_i не превосходит значений радиусов двух ее соседей (можно считать, что эти числа выписаны по окружности). Если величина R_i не меньше величин радиусов соседних вершин, то будем называть вершину A_i *локально-максимальной*. Вершины, являющиеся либо локально-минимальными, либо локально-максимальными, назовем *экстремальными*. Заметим, что неравенства здесь нестрогие и поэтому, согласно определению, все вершины описанного многоугольника являются экстремальными, так как у них одинаковые радиусы.

В любом наборе чисел имеется наименьшее и наибольшее число, и поэтому для любого многоугольника мы заведомо имеем две экстремальные вершины. Теорема о четырех вершинах говорит о том, что найдутся по крайней мере еще две. В непрерывном случае необходимым является условие выпуклости кривой. А что для многоугольника?

Задача 1. *Постройте пример невыпуклого многоугольника, имеющего ровно две экстремальные вершины.*

Казалось бы, что условия выпуклости достаточно для существования четырех экстремальных вершин. Однако и это не так.

Задача 2. *Постройте пример выпуклого многоугольника, у которого ровно две экстремальные вершины.*

Надеемся, что эти задачи не вызовут у вас особенных затруднений. В качестве подсказки заметим, что достаточно рассмотреть четырехугольник. Если у вас никак не выходит решение этой задачи, то посмотрите на рисунки 3 и 4, где приведены примеры для этих задач.

Возможно, у вас возник вопрос, какое отношение имеет радиус описанной окружности к кривизне? Дело в том, что кривизной вершины A_i называют величину $1/R_i$. С этой величиной связано одно из определений кривизны для гладких кривых. Если рассмотреть точку A на кривой и на маленьком расстоянии h по обе стороны от A отложить на кривой точки B и C, то *кривизной* в точке A называется предел при h стремящемся к 0 величины $1/R(h)$, где $R(h)$ – радиус описанной окружности треугольника ABC.

Заметим, что при маленьких h угол BAC близок к 180°. В частности, если кривая выпукла, то из этого следует, что центр описанной окружности лежит внутри угла BAC. Это свойство может не выполняться для многоугольника. Легко построить пример, когда центр описанной окружности треугольника ABC лежит вне угла BAC. В связи с этим дадим следующее определение вершины положительной кривизны.

Определение. *Назовем вершину A_i многоугольника M вершиной положительной кривизны, если центр описанной вокруг треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ окружности лежит внутри угла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.1). Будем говорить, что многоугольник положительной кривизны, если все его вершины положительной кривизны.*

Нетрудно понять, что это определение согласуется с определением знака кривизны для непрерывного

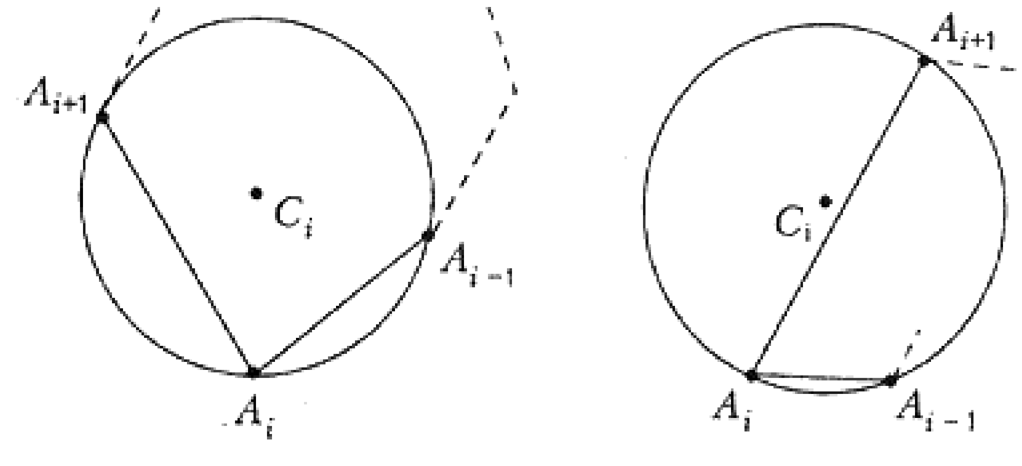

Рис. 1. а) A_i – вершина положительной кривизны; б) A_i не является вершиной положительной кривизны

Иллюстрация В.Бухарева