Физика 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Как бесплатно улететь на каникулы» предназначена девятиклассникам, заметка «Внутренняя энергия и теплота» — десятиклассникам. Одиннадцатиклассникам рекомендуются обе заметки.

Как бесплатно улететь на каникулы

А.Стасенко

«ОДНАЖДЫ в студеную зимнюю пору я из лесу вышел. Был сильный мороз. Гляжу...». Тут Догадливый Студент взглянул на высокое здание общежития — и его осенило. Он хотел домой на каникулы. Но авиабилеты были дороги, идти в ночные грузчики или в «комок» было неохота, а сила Знания безгранична. И осенила его Мысль. Если сделать планер и разогнать его вдоль скользкой оледеневшей крыши... А разогнать при помощи невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через блок без трения, и при участии нескольких Преданных Друзей (рис.1). Да если при этом еще пренебречь трением о крышу и сопротивлением воздуха...

Итак, пусть масса планера M, масса Догадливого Студента и каждого его Друга m, сила натяжения троса F. Тогда можно записать уравнения второго закона Ньютона для горизонтального движения планера с пилотом (масса $M + m$) и вертикального движения люльки с N Преданными Друзьями (масса mN, а люлька пусть невесома):

$$(M+m)a_x = F_x,\ mNa_y = mNg - F_y.$$

Но поскольку трос нерастяжим, модули ускорений его концов и ускоряющих сил одинаковы, т.е. $a_x = a_y = a$, $F_x = F_y = F$. Поэтому предыдущие равенства можно записать в виде одного уравнения (исключив F, как сказал бы математик)

$$\left(M + m(N+1)\right)a = mNg. \qquad (1)$$

Смысл этого уравнения очевиден: справа стоит сила тяжести всех Преданных

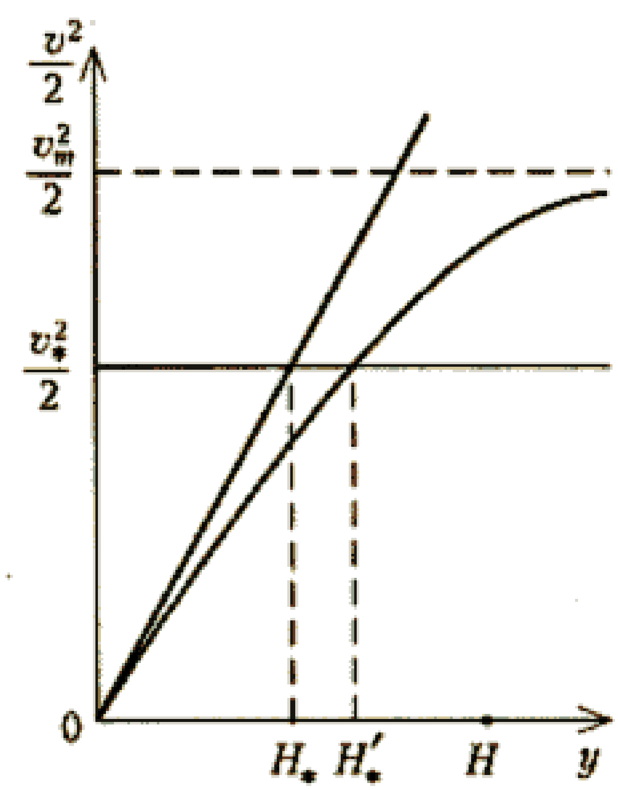

Рис. 2

Друзей, а слева — масса всей системы (включая массу Догадливого Студента и его планера), которой упомянутая сила тяжести сообщает ускорение a.

Согласно уравнению (1), ускорение постоянно, значит, скорость будет расти со временем линейно, а пройденный путь — квадратично:

$$v = at,\ s = y = a\frac{t^2}{2},$$

где

$$a = \frac{mN}{M + m(N+1)}g.$$

Но в рассматриваемой ситуации важно не время. Важно, чтобы высота общежития H и число Преданных Друзей N были достаточны для достижения какой-то наименьшей скорости v_*, при которой можно будет взлететь. Поэтому, исключив время t, лучше записать зависимость скорости от пройденного пути в виде

$$v = \sqrt{2ay},\ \text{или}\ \frac{v^2}{2} = ay. \qquad (2)$$

Последнее равенство уж очень что-то напоминает. Подставив сюда a, получим

$$\left(M + m(N+1)\right)\frac{v^2}{2} = (mNg)y. \qquad (3)$$

Это — закон сохранения полной механической энергии: кинетическая энергия общей массы системы $M_0 = M + m(N+1)$ приобретается за счет изменения потенциальной энергии Преданных Друзей при их опускании по вертикальной координате от 0 до $-y$ или за

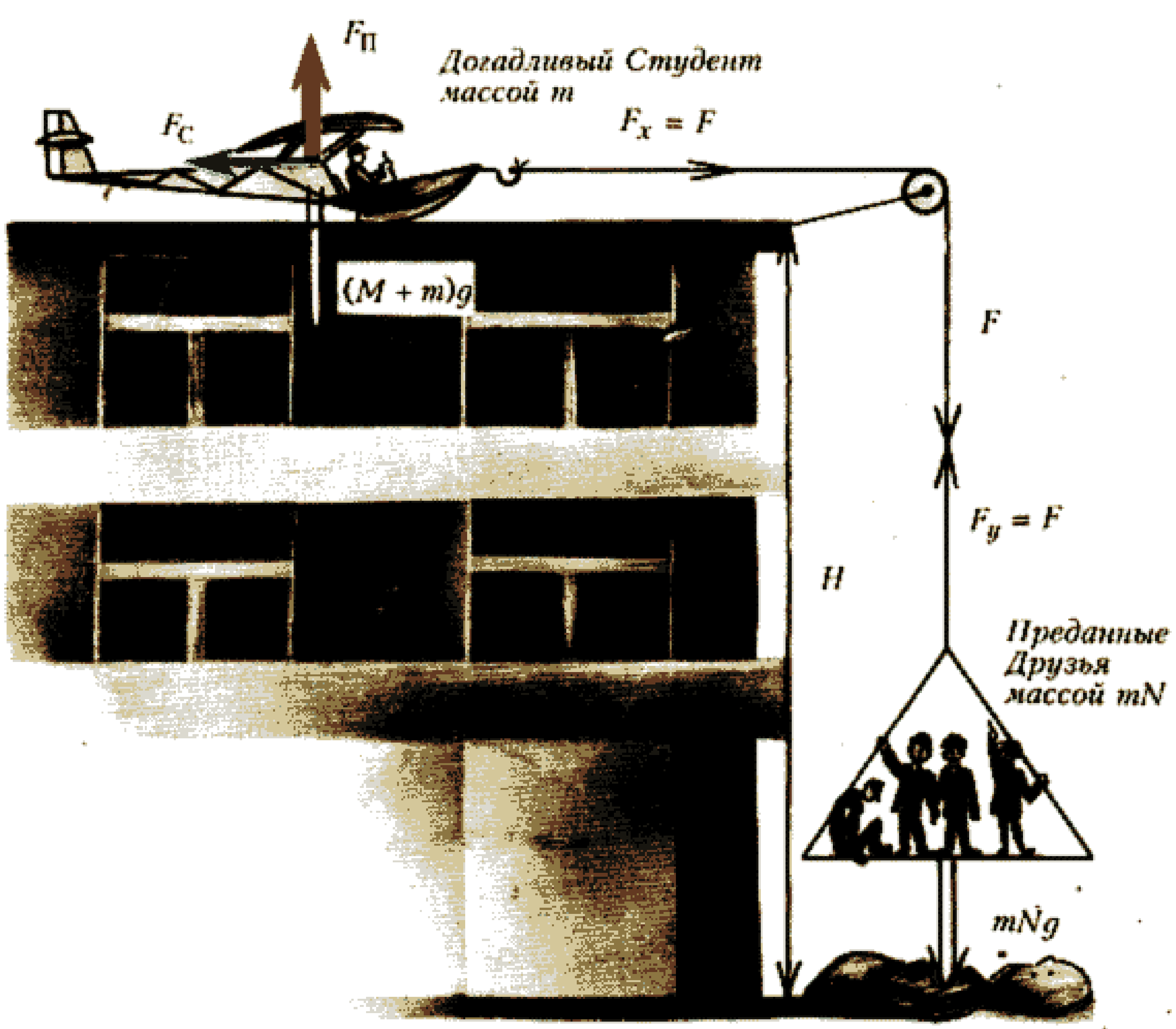

Рис. 1

счет работы постоянной силы mNg на пути $s = y$. И «энергетическое» утверждение (3) в отсутствие потерь механической энергии (что и предполагалось) адекватно «силовому» уравнению (1).

Итак, в принятых предположениях удельная кинетическая энергия системы $v^2/2$ (в расчете на единицу массы) пропорциональна расстоянию y (см. равенство (2) и рисунок 2). Но какую наименьшую скорость v_* надо набрать при $y = H$? Очевидно, такую, при которой подъемная сила планера $F_п$ станет равной силе тяжести $(M+m)g$. Из соображений размерностей, например, легко понять, что подъемная сила пропорциональна квадрату скорости, площади крыла S и плотности воздуха ρ:

$$F_п \sim \frac{v^2}{2} S\rho. \qquad (4)$$

А чтобы знак пропорциональности заменить знаком равенства, нужно поставить в эту формулу еще какой-то безразмерный множитель C, который зависит от конструкции планера, но никак не «охватывается» теорией размерности. Для его определения нужны другие теории или эксперимент. Он так и называется: коэффициент сопротивления. Таким образом, чтобы взлететь, нужно соблюсти условие

$$C\frac{v_*^2}{2} S\rho = (M+m)g. \qquad (5)$$

На рисунке 2 проведена горизонтальная прямая, соответствующая этой наименьшей скорости v_*.

И тут Догадливого Студента осенила следующая мысль: как же так — подъемная сила есть, значит, воздух есть, а сопротивления воздуха нет?! Не может такого быть. Поэтому либо в уравнение (1) нужно добавить силу сопротивления воздуха F_c, либо в уравнение (3) — ее работу. По-видимому, сила сопротивления должна зависеть от тех же величин, что и подъемная сила (см. равенство (4)), только с каким-то другим безразмерным коэффициентом сопротивления C_x. Чем меньше сопротивление при данной подъемной силе, тем более совершенен летательный аппарат. Существует понятие аэродинамического качества летательного аппарата $K = C/C_x$, с помощью которого силу сопротивления планера можно записать в виде

$$F_c = -\frac{F_п}{K} = -\frac{C}{K}\frac{v^2}{2}S\rho.$$

Добавим теперь работу этой силы в уравнение (3). Но поскольку эта сила изменяется по мере ускорения планера, уравнение нужно записывать не для конечного расстояния y, а для малых приращений Δy, внутри каждого из которых переменные силы можно считать постоянными:

$$M_0\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = mNg\Delta y - \frac{C}{K}S\rho\left(\frac{v^2}{2}\right)\Delta y. \quad (6)$$

Получилось так называемое дифференциальное уравнение относительно $v^2/2$ как функции y. Эти страшные слова не смутили Догадливого Студента. Уравнение простенькое, решать такие он умел еще в школе. Но многое можно сказать, даже не решая это уравнение.

Например, совершенно ясно, что в любой момент времени (или при любом значении y) скорость планера с учетом силы сопротивления будет меньше, чем без учета этой силы. Значит, соответствующая кривая на рисунке 2 пойдет ниже прямой ay. Далее, когда (из-за увеличения скорости) сила сопротивления станет равной постоянной силе тяжести mNg, скорость перестанет изменяться и достигнет предельного значения v_m. Положив левую часть уравнения (6) равной нулю, получим

$$\frac{v_m^2}{2} = mNg\frac{K}{CS\rho}. \qquad (7)$$

Эта горизонтальная прямая проведена штрихами на рисунке 2. Именно к ней будет асимптотически стремиться (никогда не достигая) кривая зависимости удельной кинетической энергии от расстояния. Из рисунка видно, что теперь (с учетом силы сопротивления) эта кривая пересечет прямую $v_*^2/2$, соответствующую наименьшей требуемой скорости v_*, при $H_*' > H_*$. Если вообще пересечет — для этого нужно соблюдение условия $v_m^2/v_*^2 > 1$. Тогда, разделив друг на друга равенства (7) и (5), получим

$$\frac{mNK}{M+m} > 1.$$

Видно, что друзей надо приглашать побольше (увеличивать N) или делать планер полегче (уменьшать M) и аэродинамически совершеннее (увеличивать K). Все это очевидно, но теперь можно ответить и на вопросы «сколько?».

И еще одно важное наблюдение сделаем, не решая уравнение (6), а лишь слегка преобразовав его. Используем характерную скорость v_m в качестве масштаба скоростей. Для этого уравнение (6) разделим на равенство (7) и на суммарную массу M_0:

$$\Delta\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 = \left(1-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right)\left(\frac{CS\rho}{KM_0}\right)\Delta y. \quad (8)$$

Теперь видно, что и расстояние Δy просто напрашивается отнести к некоторой характерной величине, имеющей размерность длины. Она уже приготовлена во вторых скобках правой части уравнения. Обозначим ее через h:

$$h = \frac{KM_0}{CS\rho}.$$

Пусть, например, качество планера соответствует $K \sim 10$, площадь его крыла $S \sim 10$ м², суммарная масса всей движущейся системы $M_0 \sim 10^3$ кг, плотность морозного воздуха $\rho \sim 1$ кг/м³, а безразмерный коэффициент подъемной силы $C \sim 1$. Тогда $h \sim 10$ м.

Введенная нами h — не случайная комбинация букв. Она действительно характеризует то расстояние, на котором скорость «почти» достигает своего максимального значения, или, как говорят физики, релаксирует к установившемуся значению. Поэтому h можно назвать длиной релаксации.

Сказанного уже вполне достаточно. Но уж совсем Любопытный Читатель может потребовать точную зависимость скорости планера от расстояния. Пожалуйста. Для этого нужно просто решить уравнение (8), добавив к нему начальное условие: при $y = 0$ скорость планера $v = 0$. Учтем еще, что $\Delta(v/v_m)^2 = -\Delta\left(1-(v/v_m)^2\right)$, поскольку знак приращения Δ «съедает» любую постоянную, в том числе и единицу, и введем новую переменную

$$\beta = 1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^2.$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде

$$d\beta = -\beta\frac{dy}{h}.$$

Это уравнение широко известно в науке. Например, оно может описывать распад радиоактивных элементов (тогда y играет роль времени, а h — периода полураспада) или изменение популяции микробов в банке (тогда h отрицательно). В нашем случае решение последнего уравнения с упомянутым начальным условием имеет вид (не верите — спросите любого прохожего):

$$\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 = 1 - e^{-y/h}.$$

И теперь уж Догадливый Студент, измерив высоту общежития H, точно может сказать, сколько Преданных Друзей нужно пригласить, чтобы его планер достиг необходимой скорости..

Но где взять планер? Подсчитав все затраты и предвидя еще возражения коменданта общежития, мэрии, муниципалитета, самих Преданных Друзей и, наконец, возможную оттепель (при которой нужно учесть еще и силу трения о крышу), он понял, что дешевле купить авиабилет. Так что — летайте самолетами…