МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Миф о Дидоне и изопериметрическая задача

И. ШАРЫГИН

Мы смогли найти клад потому, что знали о его существовании.

Из воспоминаний кладоискателя

В РИМСКОЙ мифологии есть легенда о Дидоне. Согласно этой легенде, Дидона была дочерью царя Тира и женой жреца Геракла Акербаса; После того как брат Дидоны Пигмалион убил ее мужа, позарившись на его богатства, Дидона была вынуждена бежать. Захватив с собой часть сокровищ мужа, она в сопровождении многочисленных спутников прибыла в Африку и купила у берберийского царя Ярба землю. По условию она могла взять столько земли, сколько покроет одна бычья шкура. Дидона разрезала эту шкуру на тонкие ремни и окружила этими ремнями изрядный кусок земли. На этом месте была основана цитадель Карфагена Бирсу. (По-гречески «бирсу» как раз и означает «шкура».)

Так гласит легенда. А вот известная головоломка.

Можно ли в листе бумаги размером с обычную страницу из тетради проделать такое отверстие, чтобы сквозь него мог свободно пройти человек?

Нетрудно увидеть сходство этой головоломки с проблемой, которую решала Дидона. Несмотря на некоторое усложнение задачи — лист не должен распадаться на части, — «метод Дидоны» вполне может быть использован при решении этой головоломки. Кстати, очень может быть, что и сама Дидона решала именно такую задачу. Просто историки, специалисты по мифологии, наконец, переводчики не слишком обращали внимание на точную постановку «задачи Дидоны». (Если вы не справились с этой головоломкой, загляните в конец журнала, там вы найдете одно из возможных решений.)

И хотя с математической точки зрения постановка задачи в головоломке является более точной, чем задача, поставленная перед Дидоной, она еще не дотягивает до уровня точности, которой должна удовлетворять настоящая «математическая задача». Вообще, проблема «постановки задачи» является главной проблемой математического моделирования, главным вопросом прикладной математики. В некотором смысле даже умение правильно поставить, сформулировать задачу важнее умения ее решить.

Но прежде чем перейти к математической части нашей статьи, упомянем еще одну задачу, которая часто встречается в фольклоре и литературе. В качестве примера возьмем притчу Л.Н.Толстого «Много ли человеку земли нужно». Не станем пересказывать ее сюжет, сформулируем лишь задачу, которую пытался решить герой притчи: обойти за день как можно больший участок земли.

Можно говорить о целом цикле математических задач, порожденных этими мифологическими и литературными историями. Вот одна из простейших.

Задача 1. *Среди треугольников, у которых задана одна из сторон и сумма двух других, найдите треугольник с наибольшей площадью.*

Решение. Пусть известная сторона равна $2a$, а сумма двух других $2b$. (Понятно, что $b > a$.) Обозначим одну из этих сторон через $b + x$, тогда вторая будет $b - x$ (рис.1). По формуле

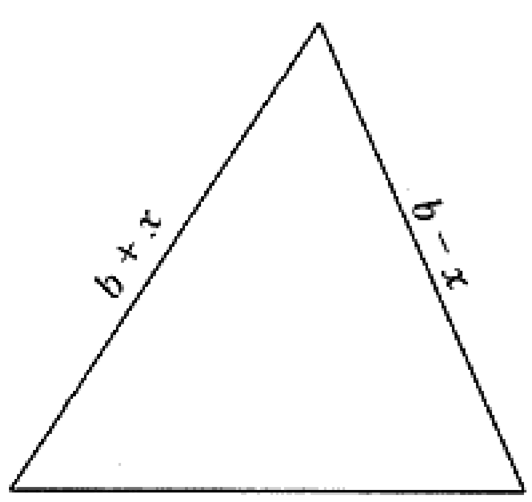

Рис. 1

Герона имеем (обозначив площадь треугольника через Δ):

$$\Delta^2 = (a+b)(b-a)(a+x)(a-x) = \\ =(b^2-a^2)(a^2-x^2).$$

Из этого равенства видно, что наибольшей площадь будет при $x = 0$, т.е. когда наш треугольник является равнобедренным.

Замечание к решению. Обратите внимание на то, что мы смогли так коротко решить задачу благодаря правильно выбранной параметризации. В частности, если задана сумма двух величин (у нас это $2b$), а нужный результат по всей видимости достигается при их равенстве, то очень часто удобно оказывается обозначить эти величины именно так: $b + x$, $b - x$.

Задача 2. *Докажите, что среди треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.*

Очень важно то, что при доказательстве мы будем использовать факт *существования* среди треугольников с заданным периметром треугольника с наибольшей площадью.

Доказательство. Рассмотрим треугольник наибольшей площади с заданным периметром. Предположим, что этот треугольник не является равносторонним. Докажем, что тогда найдется треугольник с тем же периметром и большей площадью. Т.е. рассматриваемый треугольник не может иметь наибольшую возможную площадь.

Итак, среди сторон рассматриваемого треугольника имеется хотя бы одна

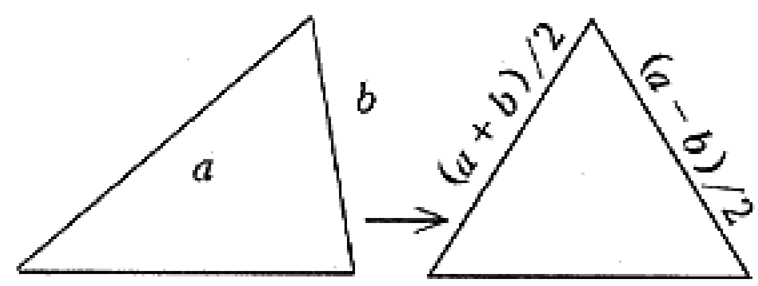

Рис. 2

пара неравных сторон (рис.2). Обозначим эти стороны через a и b, c — третья сторона ($a \neq b$). Треугольник со сторонами $(a+b)/2$, $(a-b)/2$, c, как это следует из предыдущей задачи, имеет бóльшую площадь при том же периметре. А это противоречит предположению о том, что рассматриваемый треугольник имел наибольшую площадь среди треугольников с периметром $P = a + b + c$.

Дальше можно было бы доказать, что среди всевозможных n-угольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный. Затем, увеличивая n, в пределе «добраться» до окружности. Но мы не будем идти по этому длинному пути, а перейдем сразу к основной задаче. Сначала сформулируем ее.

Задача 3. *Среди всевозможных плоских замкнутых линий заданной длины найдите ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.*

Это и есть знаменитая изопериметрическая задача (от греческих слов «ísos» — равный и «perimetréō» — измеряю вокруг). С термином «периметр» вы давно знакомы, правда, относили его в основном к многоугольникам. Но это понятие, как в нашей задаче, распространяется на произвольные фигуры. Иногда эту задачу называют также «задачей Дидоны». Происхождение этого названия теперь можно уже не объяснять.

При решении мы, как и в предыдущем случае, будем опираться на факт существования среди всевозможных фигур с заданным периметром фигуры с наибольшей площадью. Иными словами, тем, что среди замкнутых линий данной длины существует линия, ограничивающая наибольшую площадь. (А как же иначе, ведь площади всевозможных фигур с данным периметром ограничены!) Мы приведем решение, найденное Якобом Штейнером (1796—1863) — выдающимся швейцарским геометром XIX столетия. (Как видите, в прошедшем году исполнилось 200 лет со дня его рождения.)

Решение. Прежде всего заметим, что фигура наибольшей площади с заданным периметром должна быть выпуклой. (Т.е. если какие-то две точки фигуры расположены внутри нее или на границе, то и весь отрезок, соединяющий эти точки, также расположен внутри или на границе фигуры.) В противном случае мы могли бы построить

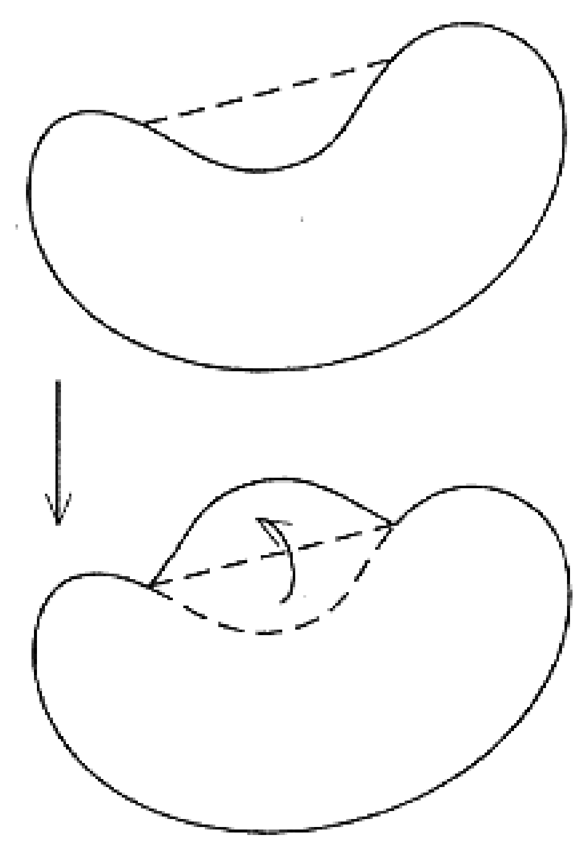

Рис. 3

линию той же длины, ограничивающую фигуру большей площади (рис.3).

Второе замечание о свойствах искомой фигуры: если прямая делит пополам периметр фигуры, то она делит

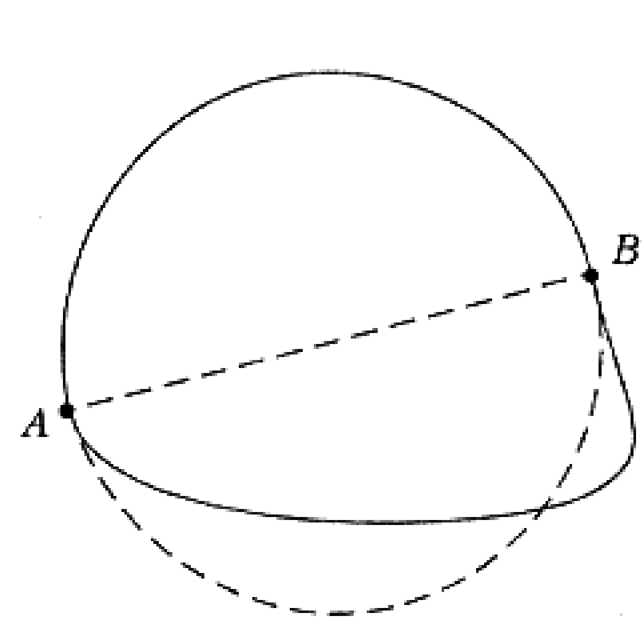

Рис. 4

пополам и площадь фигуры. В самом деле, пусть прямая AB (A и B — точки на границе, рис.4) делит пополам периметр фигуры, но при этом одна из двух частей имеет большую площадь. Заменим меньшую часть фигурой, симметричной большей относительно прямой

AB. При этом площадь фигуры увеличится, а периметр не изменится.

Пусть теперь M — любая точка на границе фигуры, отличная от A и B (рис.5). Докажем, что $\angle AMB = 90°$.

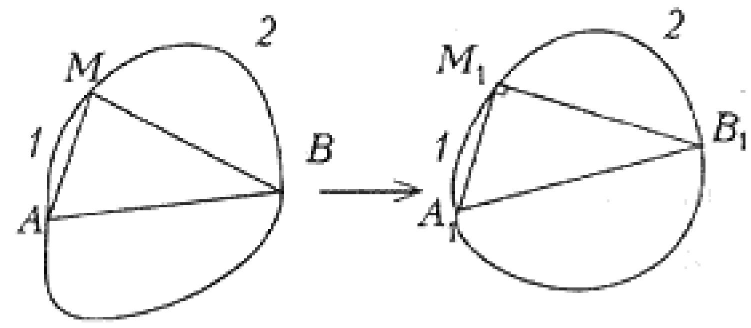

Рис. 5

Предположим, что это не так. Проведем отрезки AM, MB и AB, они разрежут нашу фигуру на четыре части. Построим новую фигуру следующим образом. Сначала строим прямоугольный треугольник $A_1M_1B_1$, в котором $A_1M_1 = AM$, $M_1B_1 = MB$, $\angle A_1M_1B_1 = 90°$. Приставим к его катетам сегменты, равные сегментам *1* и *2* (см. рис.5), после чего отразим все относительно гипотенузы A_1B_1. Получим новую фигуру с тем же периметром и большей площадью. Ведь площадь треугольника $A_1M_1B_1$ больше площади треугольника AMB. Итак, мы доказали, что если прямая AB делит пополам периметр фигуры с наибольшей площадью, M — произвольная точка на границе, отличная от A и B, то $\angle AMB = 90°$, т.е. M лежит на окружности с диаметром AB. Таким образом, решение изопериметрической задачи дает окружность.

С изопериметрической задачи по существу начинается одно из важнейших направлений современной математики — вариационное исчисление.

На этом можно было бы и закончить заметку, но мы сделаем еще один шаг (вперед? назад?). Как мы уже отмечали, наиболее естественным казался путь от многоугольников к окружности. Однако был предложен способ решения общей задачи, совсем не опирающийся на свойства экстремальных многоугольников. Более того, наоборот, некоторые свойства этих многоугольников относительно легко получаются из этого общего результата, в то время как доказательства этих свойств, не опирающиеся на общий результат, представляются весьма затруднительными. Вот пример.

Задача 4. *Рассмотрим всевозможные n-угольники с заданными сторонами. (Можно считать, что имеется некоторый многоугольник, соседние стороны которого шарнирно соединены друг с другом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, которые получаются при деформации такого многоугольника.) Докажите, что среди таких многоугольников найдется многоугольник, около которого можно описать окружность, и именно этот многоугольник имеет наибольшую площадь среди рассматриваемых многоугольников.*

Решение. Рассмотрим достаточно большую окружность, такую, что если мы начнем от какой-то точки A этой окружности откладывать последовательно в одном направлении хорды, равные сторонам многоугольника, то сумма всех соответствующих дуг будет меньше окружности. Обозначим через B конец последней хорды. Одна из двух дуг AB не содержит построенных нами хорд (рис.6). Начнем уменьшать радиус окружности. В какой-то

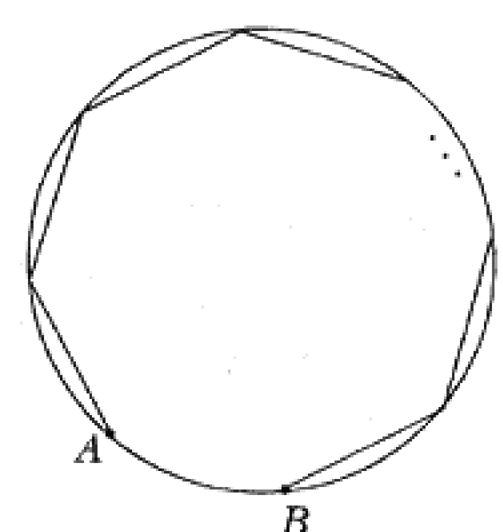

Рис. 6

момент точки A и B совпадут. При этом мы получим искомый вписанный многоугольник (рис.7,*а*). Докажем, что он имеет наибольшую площадь. Рассмотрим произвольный многоугольник с такими же сторонами. Построим на его сторонах такие же сегменты, как и на соответствующих сторонах вписанного многоугольника (рис.7,*б*). Граница этих сегментов имеет длину, равную длине описанной окружности. Значит, площадь, ограниченная дугами сегментов на рисунке 7,*б*, меньше площади круга на рисунке 7,*а*. Убирая эти сегменты, получим, что площадь вписанного многоугольника

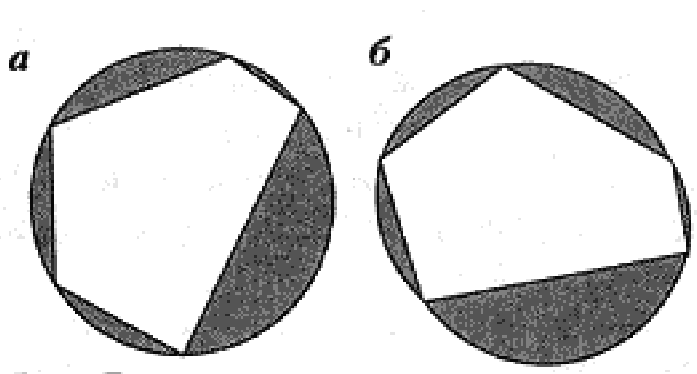

Рис. 7

(рис.7,*а*) больше площади любого другого многоугольника с такими же сторонами (рис.7,*б*).

А теперь вновь вспомним главную изопериметрическую задачу (задача 3). Сам факт существования решения задачи, факт, достаточно очевидный для неиспорченного математическими трюизмами разума, позволяет это самое решение найти. В связи с этим расскажем одну историю, относящуюся уже к современному научному фольклору.

Решение одной сложной научной проблемы было поручено группе ученых, среди которых были математик и физик. Как-то раз математик, встретив физика, радостно сообщил, что он сумел доказать теорему о существовании решения проблемы. В ответ физик заметил, что если бы он хоть на мгновение усомнился в существовании решения, то никогда бы не стал заниматься этой проблемой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Одна сторона треугольника равна a, а противоположный угол равен α. Найдите наибольшее значение площади таких треугольников.

2. Рассмотрим всевозможные треугольники единичной площади. Найдите наименьшее значение периметров таких треугольников.

3. На дуге AB некоторой окружности найдите такие точки K и M, что площадь четырехугольника $AKMB$ достигает наибольшего значения.

4. Рассмотрим фигуру с периметром l и площадью Δ. Докажите, что $l^2 > 12{,}5\Delta$.

5. Имеется набор из отрезков. Рассмотрим всевозможные многоугольники, последовательные стороны которых равны заданным отрезкам, взятым в некотором порядке. Докажите, что наибольшее значение площади таких многоугольников не зависит от того, в каком порядке взяты отрезки.

6. Рассмотрим всевозможные n-угольники, у которых заданы $n - 1$ сторона. Докажите, что наибольшее значение площади таких n-угольников достигается для такого вписанного n-угольника, у которого нефиксированная сторона является диаметром описанной окружности.

7. Найдите линию наименьшей длины, делящую пополам площадь правильного треугольника со стороной 1.

ПОПРАВКА

В статье «Поступайте в ОЛ ВЗМШ» (см. «Квант» №6 за 1996 г.) в задаче 6 вступительной работы на отделение химии допущена ошибка. Масса выделившегося в результате реакции черного осадка С должна быть 12,7 г.