Движение тел в гравитационных полях

В.МОЖАЕВ

Мы БУДЕМ рассматривать относительно слабое гравитационное взаимодействие между телами, когда эти тела покоятся или достаточно медленно движутся (по сравнению со скоростью света). В этом случае справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Он утверждает, что две любые материальные частицы (тела, линейные размеры которых много меньше расстояния между ними) с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой F, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Коэффициент пропорциональности G называют гравитационной постоянной. По современным данным $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

В ньютоновской теории тяготения справедлив принцип суперпозиции гравитационных полей — сила тяготения, действующая на данную частицу со стороны многих других частиц, является векторной суммой сил, действующих на частицу со стороны каждой из частиц, и каждая из этих сил не зависит от действия других сил.

Из закона Ньютона следует, что гравитационное поле — потенциальное поле. При перемещении тела в таком поле по любой замкнутой траектории работа, совершенная полем, равна нулю. Из потенциальности гравитационного поля следует также связь между силой тяготения F, действующей на материальную частицу, и ее потенциальной энергией U. В случае сферически симметричного гравитационного поля эта связь имеет вид

$$F_r = -\frac{dU}{dr},$$

где F_r — проекция силы на направление радиуса-вектора r.

Ниже на конкретных примерах мы рассмотрим сферически симметричные гравитационные поля и движения тел в этих полях.

Задача 1. *1) Приняв за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии бесконечность, найдите потенциальную энергию тела массой m в гравитационном поле Земли. Землю считайте однородным шаром массой $M_З$ и радиусом $R_З$. Рассмотрите случаи, когда тело находится вне и внутри Земли. 2) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли сможет удалиться небольшое тело массой m, если ему сообщить начальную скорость, равную первой космической скорости $v_к$?*

1) Рассмотрим сначала случай, когда тело массой m находится на произвольном расстоянии r от центра Земли и $r \ge R_З$. В этом случае на тело действует гравитационная сила, равная $F = -GmM_З/r^2$ и направленная к центру Земли. Используем связь $F = -dU/dr$, где U — потенциальная энергия тела в поле Земли. Отсюда $U = -\int F dr + C_1$, где C_1 — некоторая константа, которую найдем из условия, $U(\infty) = 0$. После подстановки выражения для силы получим

$$U(r) = -G\frac{mM_З}{r}.$$

Очевидно, что $C_1 = 0$.

Теперь рассмотрим ситуацию при $r < R_З$. В этом случае $F = -GmM_З r/R_З^3$ (покажите это). Тогда $U(r) = \int GmM_З r dr/R_З^3 + C_2$. Константа C_2 находится из граничного условия $U(R_З) = -GmM_З/R_З$. После подстановки получим, $C_2 = -3GmM_З/(2R_З)$, следовательно,

$$U(r) = G\frac{mM_З}{R_З}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_З}\right)^2 - \frac{3}{2}\right).$$

Общая зависимость $U(r)$ показана на рисунке 1. Очевидно, что такая же зависимость будет иметь место не только для гравитационного поля Земли, но и для поля любого тела в виде однородного (по плотности) шара, если вместо массы Земли в полученные выражения подставить массу данного шара.

Изображенную на рисунке 1 зависимость $U(r)$ обычно называют потенциальной ямой. Это название связано с тем, что, если полная энергия тела, находящегося в таком поле, меньше нуля, то это тело оказывается как бы запертым в яме, т.е. оно не сможет уйти от Земли на бесконечность и будет совершать финитное движение. Максимально возможное удаление тела определяется границей (стенкой) ямы, при достижении которой скорость тела становится равной нулю и тело возвращается обратно.

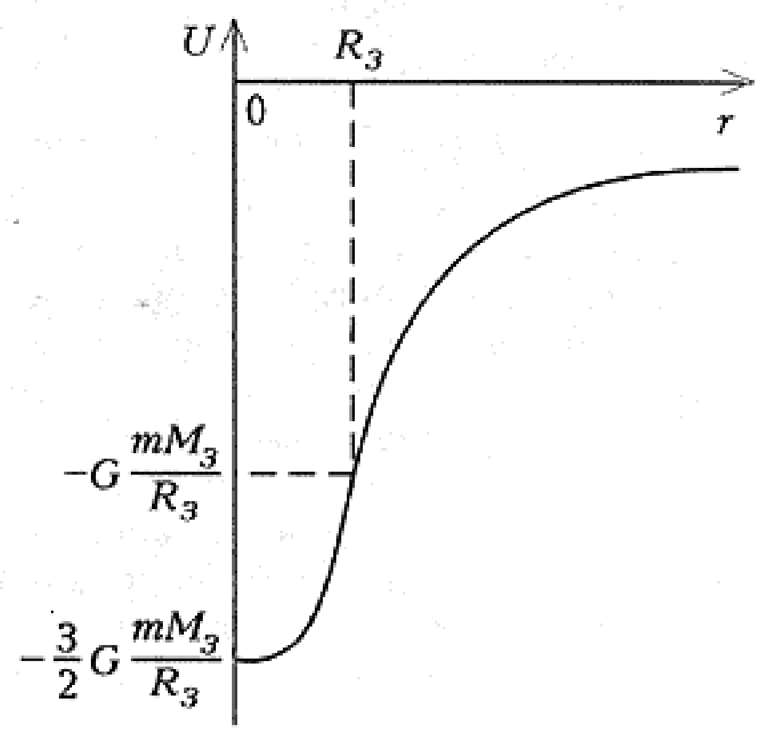

Рис. 1

2) При фиксированной величине начальной скорости v_0 тело сможет максимально удалиться от поверхности Земли, если его скорость будет направлена по радиусу. Это удаление H находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = -G\frac{mM_З}{R_З + H},$$

откуда

$$H = \frac{R_З}{2GM_З/(R_З v_0^2) - 1}.$$

Первая космическая скорость равна $v_к = \sqrt{GM_З/R_З}$. После подстановки получим

$$H = R_З.$$

Задача 2. *Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна v = 12 км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью, заполненной веществом с плотностью в $\beta = 2$ раза больше плотности планеты (рис.2). Отношение радиуса полости к радиусу планеты $\alpha = 1/2$.*

Тема этой статьи несколько выходит за рамки школьного курса физики. Однако рассмотренные в статье задачи неоднократно предлагались на вступительных экзаменах в вузы, например — в Московский физико-технический институт. (Прим. ред.)

Вторая космическая скорость для планеты соответствует скорости тела на поверхности планеты, при которой полная энергия тела равна нулю. Для однородной планеты массой M и радиусом R это условие имеет вид

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{R} = 0.$$

В случае неоднородной планеты плотность вещества, заполняющего полость, равна $\rho = 3\beta M/\left(4\pi R^3\right)$. Будем рассматривать эту полость как суперпозицию двух полостей, одна из которых заполнена веществом плотностью $\rho_0 = 3M/\left(4\pi R^3\right)$, а другая — плотностью $\rho_1 = 3(\beta-1)M/\left(4\pi R^3\right)$. Очевидно, что потенциальная энергия тела на поверхности такой планеты будет равна сумме потенциальных энергий однородной планеты и шара с радиусом полости и плотностью ρ_1.

Минимальная величина второй космической скорости будет в той точке поверхности планеты, где потенциальная энергия минимальна по абсолютной величине. Этой точкой будет точка A (см. рис.2). Обозначим для нее величину второй космической скорости через v_1, тогда условие равенства нулю полной энергии тела в точке A будет иметь вид

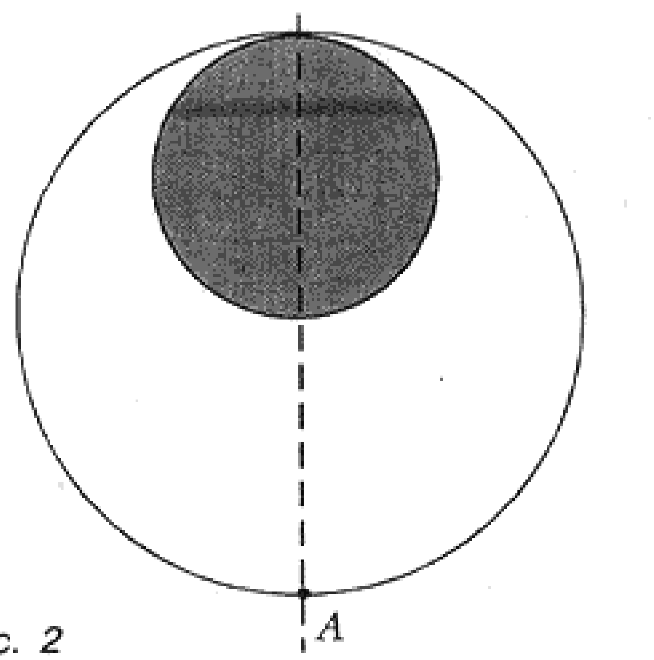

Рис. 2

$$\frac{v_1^2}{2} - G\frac{M}{R} - G\frac{\alpha^3(\beta-1)M}{(\alpha+1)R} = 0,$$

или, после подстановки численных значений α и β,

$$v_1^2 - \frac{13}{6}G\frac{M}{R} = v_1^2 - \frac{13}{12}v^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_1 = \sqrt{\frac{13}{12}}\,v \approx 12{,}5 \text{ км/с}.$$

Задача 3. *Для спутников, движущихся вокруг Земли по эллиптическим орбитам, выразите длину большой оси эллипса через полную энергию спутника E (кинетическая плюс потенциальная).*

Рассмотрим эллиптическую орбиту спутника, изображенную на рисунке 3.

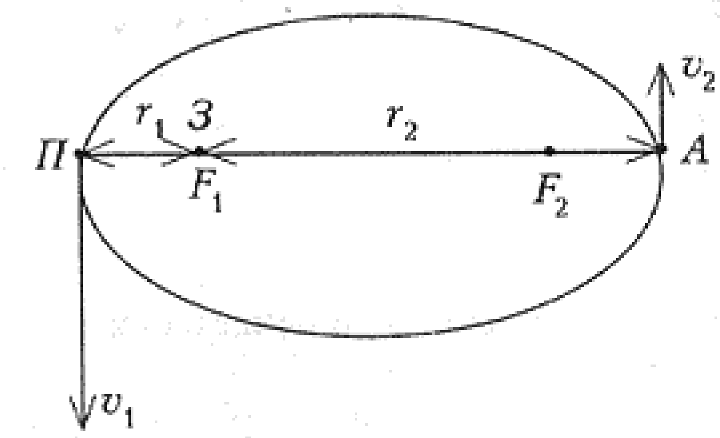

Рис. 3

Пусть в одном из фокусов эллипса находится Земля (например, в F_1). Тогда точка A (афелий) соответствует максимальному удалению спутника от Земли, а точка $П$ (перигелий) является точкой минимального удаления. Длину отрезка $ПF_1$ обозначим через r_1, а длину отрезка F_1A — через r_2. В этих обозначениях длина большой оси равна $2a = r_1 + r_2$.

Запишем полную энергию спутника для точки $П$:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM_З}{r_1} = E,$$

где m — масса спутника, v_1 — его скорость, а $M_З$ — масса Земли. Воспользуемся вторым законом Кеплера (законом площадей): радиус-вектор спутника в равные промежутки времени описывает равные площади. Из этого закона для точек орбиты спутника A и $П$ можно записать

$$v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Обозначим это произведение через L. Выражая v_1 через L и подставляя в выражение для полной энергии, получим относительно r_1 квадратное уравнение

$$r_1^2 + G\frac{mM_З}{E}r_1 - \frac{mL^2}{2E} = 0.$$

Это уравнение имеет два решения, которые соответствуют нашим двум точкам A и $П$ (поскольку коэффициент при r_1 и свободный член данного уравнения одинаковы для этих точек). Поэтому получаем

$$r_1 = -G\frac{mM_З}{2E} - \sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}},$$

$$r_2 = -G\frac{mM_З}{2E} + \sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}}.$$

Отсюда находим большую ось эллиптической орбиты спутника:

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{mM_З}{E}.$$

Следует напомнить, что полная энергия E величина отрицательная — полная энергия при финитном движении всегда является отрицательной величиной.

Обсудим физический смысл полученного соотношения. При фиксированном значении полной энергии спутник может двигаться по большому семейству эллиптических орбит, но все эти орбиты будут иметь одну и ту же большую ось. А если мы знаем величину большой оси эллипса орбиты спутника, то мы однозначно можем вычислить полную энергию спутника. Естественно, что полученная связь имеет место не только для спутников Земли, но и для орбит планет Солнечной системы, для спутников других планет — главное, чтобы это были спутники, т.е. тела, масса которых много меньше массы тела, вокруг которого они вращаются.

Задача 4. *Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая ось которой равна*

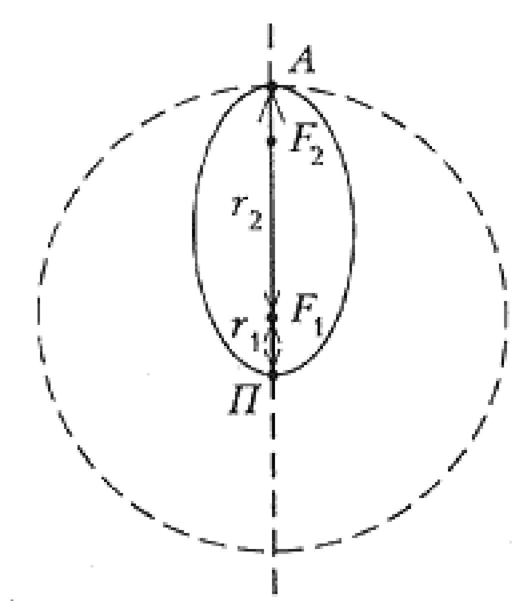

Рис. 4

$2a$. Центр Земли расположен в фокусе эллипса F_1 (рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке максимального удаления и расстояние от центра Земли до корабля равно r_2, на короткое время включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом r_2? Считать известными ускорение свободного падения g на поверхности Земли и радиус Земли $R_З$.

Поскольку речь идет о переходе на круговую орбиту, новая скорость корабля должна быть перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему центр Земли и центр масс корабля, а следовательно, и вектор изменения скорости корабля должен быть направлен вдоль скорости корабля перед включением двигателя. Вычислим теперь величину и знак изменения скорости.

Величина скорости v_0, которую должен иметь корабль на круговой орбите радиусом r_2, находится из уравнения движения корабля $v_0^2/r_2 = GM_{\text{З}}/r_2^2$, где $M_{\text{З}}$ — масса Земли. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_{\text{З}}}{r_2}} = \sqrt{R_{\text{З}}g\frac{R_{\text{З}}}{r_2}}.$$

Скорость корабля v_A в точке A до включения двигателя можно найти из соотношения между большой осью эллиптической орбиты и полной энергией корабля (см. задачу 3). Для нашего случая эта связь имеет вид

$$\frac{mv_A^2}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{r_2} = -G\frac{mM_{\text{З}}}{2a},$$

откуда

$$v_A = \sqrt{G\frac{M_{\text{З}}}{r_2}\left(2-\frac{r_2}{a}\right)} = v_0\sqrt{2-\frac{r_2}{a}}.$$

Поскольку $r_2 > a$, то $v_A < v_0$. Следовательно, для перехода на круговую орбиту необходимо увеличить скорость на величину

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{R_{\text{З}}g\frac{R_{\text{З}}}{r_2}}\left(1-\sqrt{2-\frac{r_2}{a}}\right).$$

Задача 5. *Вычислите приближенно третью космическую скорость, т.е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы (ушла в бесконечность). Влиянием планет Солнечной системы пренебречь. Орбиту Земли вокруг Солнца считать круговой с радиусом $R_{\text{ЗС}} = 1{,}5\cdot10^8$ км и временем обращения $T = 1$ год. Первая космическая скорость $v_{\text{к}} = 7{,}9$ км/с.*

Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом неоднородностью поля солнечного тяготения. Считая массу Земли $M_{\text{З}}$ бесконечно большой по сравнению с массой ракеты m, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v — скорость ракеты у поверхности Земли, $R_{\text{З}}$ — радиус Земли, а v_∞ — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Выразим потенциальную энергию ракеты через круговую скорость спутника Земли, движущегося по круговой орбите вблизи ее поверхности:

$$G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} = mv_{\text{к}}^2.$$

Тогда

$$v_\infty^2 = v^2 - 2v_{\text{к}}^2.$$

На втором этапе, после того как ракета выйдет из зоны земного тяготения, будем рассматривать ее движение в гравитационном поле Солнца. Скорость ракеты в системе координат, связанной с Солнцем, векторно складывается из скорости $\vec{v}_\infty$ и скорости кругового движения Земли вокруг Солнца $\vec{V}$. Найдем, какую скорость (параболическую) $v_{\text{п}}$ должно иметь тело на земной орбите, чтобы уйти из Солнечной системы. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_{\text{п}}^2}{2} - G\frac{mM_{\text{С}}}{R_{\text{ЗС}}} = 0,$$

откуда

$$v_{\text{п}} = \sqrt{2G\frac{M_{\text{С}}}{R_{\text{ЗС}}}} = \sqrt{2}V.$$

Очевидно, что минимальное значение скорости ракеты $v_{\min}$ должно быть в том случае, когда ее скорость направлена вдоль скорости Земли, т.е. $v_{\text{п}} = v_\infty + V$. После подстановки выражений для $v_{\text{п}}$ и v_∞ получим

$$v_{\min} = \sqrt{2v_{\text{к}}^2 + V^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}.$$

Поскольку $V = 2\pi R_{\text{ЗС}}/T \approx 30$ км/с, а $v_{\text{к}} = 7{,}9$ км/с, то $v_{\min} = 16{,}7$ км/с.

Задача 6. *Определите, какую минимальную дополнительную скорость необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, движущемуся по очень высокой круговой орбите, чтобы он смог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, радиус орбиты Земли равен $R_{\text{ЗС}} = 1{,}5\cdot10^8$ км, а радиус орбиты Марса $R_{\text{МС}}$ в 1,52 раза больше, чем у Земли.*

«Очень высокая круговая орбита» означает, что радиус орбиты спутника много больше радиуса Земли и что скоростью, которой обладает спутник относительно Земли, можно пренебречь. Но, оставаясь спутником Земли, он движется вместе с Землей относительно Солнца по круговой орбите со скоростью

$$V = \sqrt{GM_{\text{С}}/R_{\text{ЗС}}} \approx (2\pi R_{\text{ЗС}})/T \approx 30 \text{км/с},$$

где M — масса Солнца, T — время обращения Земли вокруг Солнца. Если мы будем добавлять спутнику скорость

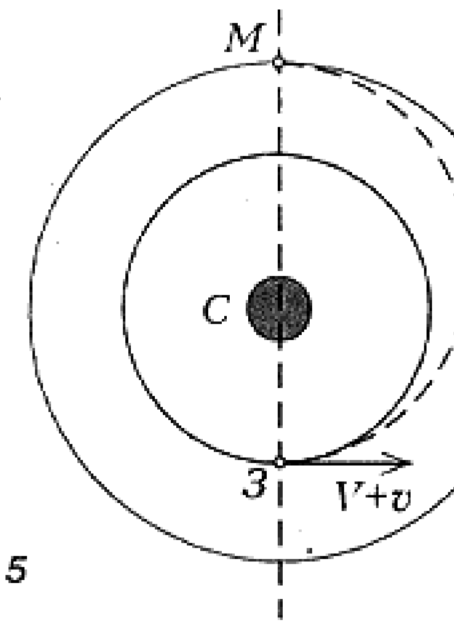

Рис. 5

вдоль направления скорости Земли, то он будет двигаться по эллиптическим орбитам, большая ось которых больше диаметра орбиты Земли и растет по мере увеличения добавочной скорости. Очевидно, что цель будет достигнута, когда точка максимального удаления спутника достигнет круговой орбиты Марса. Такая траектория (полуэллипс) показана на рисунке 5 штриховой линией, большая ось орбиты равна $2a = R_{\text{ЗС}} + R_{\text{МС}}$.

Полная энергия спутника массой m на данной орбите составляет

$$E = \frac{m(V+v)^2}{2} - G\frac{mM_{\text{С}}}{R_{\text{ЗС}}} = \frac{m(V+v)^2}{2} - mV^2 = \frac{m\left(v^2+2Vv-V^2\right)}{2}.$$

Используем связь между большой осью эллипса и полной энергией спутника:

$$R_{\text{ЗС}} + R_{\text{МС}} = \frac{2GM_{\text{С}}}{V^2-2Vv-v^2} = \frac{2V^2R_{\text{ЗС}}}{V^2-2Vv-v^2}.$$

После простых преобразований, относительно добавочной скорости v получим квадратное уравнение

$$v^2 + 2Vv - \frac{(R_{\text{МС}}-R_{\text{ЗС}})V^2}{R_{\text{МС}}+R_{\text{ЗС}}} = 0,$$

которое имеет два корня:

$$v_1 = V\left(\sqrt{\frac{2R_{\text{МС}}}{R_{\text{МС}}+R_{\text{ЗС}}}}-1\right) \approx 2{,}95 \text{ км/с},$$

$$v_2 = -V\left(1+\sqrt{\frac{2R_{\text{МС}}}{R_{\text{МС}}+R_{\text{ЗС}}}}\right) \approx -62{,}95 \text{ км/с}.$$

Нашему случаю соответствует первый корень, а второй корень отвечает случаю, когда дополнительная скорость будет направлена в противоположную сторону.

Упражнения

1. Предположим, что от поверхности Земли до ее центра прорыта узкая шахта и некоторое тело падает из бесконечности с нулевой начальной скоростью в эту шахту. Какую скорость будет иметь это тело в тот момент, когда оно достигнет центра Земли? Землю считать однородным шаром. Считать известными радиус Земли $R_З$ и ускорение свободного падения на поверхности Земли g. *Указание*: под бесконечностью следует понимать большое удаление тела от Земли, но при этом тело и Земля как единое целое движутся вокруг Солнца.

2. Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна $v_0 = 10$ км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью (см. рис.2), заполненной веществом с плотностью в 2 раза меньше плотности планеты. Отношение радиуса полости к радиусу планеты равно 0,5.

3. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая полуось которой равна a. Центр Земли расположен в фокусе эллипса F_1 (см. рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке $П$ (перигелий) и расстояние от центра Земли до корабля равно r_1, включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом r_1? Считать известными ускорение свободного падения g на поверхности Земли и радиус Земли $R_З$.

4. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0, стреляют в направлении, составляющем угол $\varphi = 120°$ к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?