Какая дорожка короче?

В.БОЛТЯНСКИЙ

Причем тут 114°?

Представьте себе сквер, в котором есть одна дорожка в виде окружности и несколько радиальных дорожек, соединяющих центр сквера с несколькими точками круговой дорожки (рис.1). Как пройти из точки

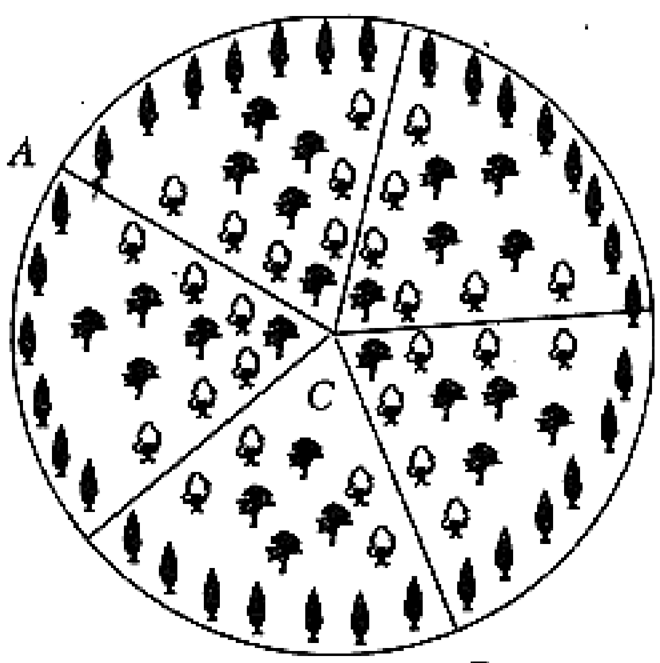

Рис. 1

A в точку B наиболее коротким путем: по окружности или по двум радиусам? Ответ может показаться странным: если $\angle AOB$ содержит меньше 114° (примерно), то выгоднее идти по дуге окружности, а в противном случае более уместна прогулка по двум радиусам.

Как измерять углы?

Чтобы объяснить, откуда взялось число 114, надо прежде всего вспомнить, в каких единицах измеряются углы. Привычнее всего, конечно, в *градусах*. Если разбить полный угол на 360 равных углов, мы получим представление о градусе. То же получится, если прямой угол разделить на 90 равных частей.

Будем теперь, начиная от одной стороны угла AOB, откладывать один за другим углы величиной 1 градус (с той же вершиной O). Если окажется, что внутри угла AOB поместилось n таких «угловых градусов», а $(n+1)$-й уже выходит за пределы угла AOB, то мы говорим, что угол AOB содержит n градусов. Если имеется остаток, то его измеряют в *минутах* (так называют шестидесятую часть градуса), а если опять окажется остаток, его измеряют в *секундах* (так называют шестидесятую часть минуты).

Такой способ измерения величин углов пришел к нам из седой древности. И поныне этот способ бытует в астрономии, да и в других науках, имеющих дело с измерением углов. Впрочем, не во всех. В артиллерии, например, применяется *град*, т.е. одна четырехсотая часть полного угла; иначе говоря, прямой угол содержит сто градов.

Откуда пришел градус?

В древности в бассейнах рек Тигра и Евфрата жили шумеры — один из наиболее интересных древних народов с высокоразвитой культурой. Они обладали математическими знаниями, имели торговые отношения между собой и с другими народами. Видимо, именно шумеры впервые ввели денежные отношения как основу для обмена одних товаров на другие. Их основной денежной единицей была *мина* — кучка серебра. Мина представляла собой довольно крупную денежную единицу, на нее можно было много купить. Поэтому часто делили мину на две половины, а для еще более мелких покупок делили каждую половинку на три равные части. Так возникла шестая часть мины. Для более мелких покупок использовали отдельные кусочки серебра (или серебряные изделия).

Аккадяне, другой древний народ Междуречья, стали использовать *шекель*, который представлял собой довольно мелкую денежную единицу. При торговых отношениях между шумерами и аккадянами шестая часть мины была приравнена десяти шекелям. И получилось, что мина равна шестидесяти шекелям. Число 60 делится на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 и другие числа, что очень удобно при покупке.

Впоследствии, в древнем Вавилоне, число 60 было положено не только в основу торговых отношений, но стало основанием шестидесятиричной системы счисления.

Она сыграла важную роль при создании единиц для измерения углов и времени. Правильный шестиугольник — одна из наиболее простых фигур, которые можно построить простыми средствами (скажем, циркулем и линейкой). И величину угла в равностороннем треугольнике (шесть таких треугольников и составляют правильный шестиугольник, рис.2) приняли, за единицу измерения углов. Эта единица — весьма крупная. И ее разделили (подобно тому, как мина была разделена на 60

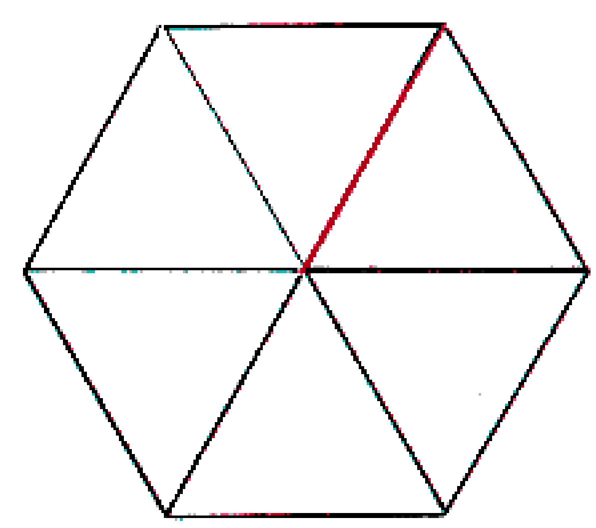

Рис. 2

шекелей) на 60 равных частей — градусов. А при более точных измерениях углов, что было важно для быстро развивавшейся астрономии, каждый градус делился на 60 минут. Так 60-ричная система счисления наложила свой отпечаток на исторически возникшие единицы измерения углов. Аналогичное положение вещей возникло и при измерении промежутков времени: час делится на 60 минут, а минута на 60 секунд.

Длина окружности

Измерению длин и площадей придавалось с древних времен большое значение. Интерес представляло не только измерение длин отрезков (или площадей многоугольников), но также измерение длины окружности и ее дуг (или измерение площади круга и его частей). Правильный шестиуголь-

Иллюстрация В.П.Бухарева

ник, вписанный в окружность с радиусом r (рис.3), имеет периметр немного меньший, чем длина этой ок-

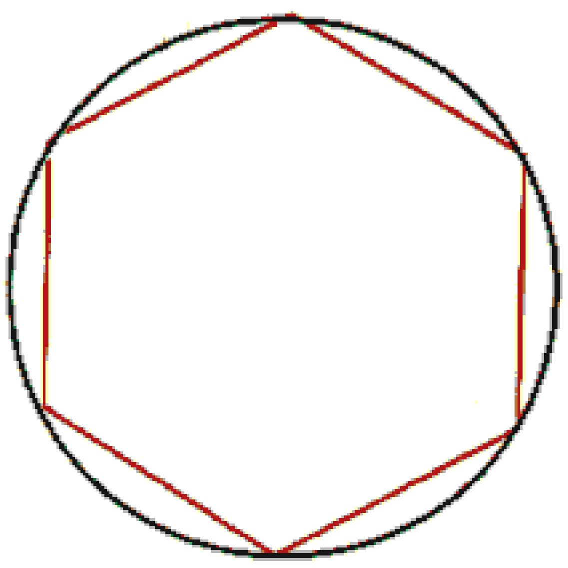

Рис. 3

ружности (вообще, выпуклая замкнутая линия L_1 имеет меньшую длину, чем длина «объемлющей» ее замкнутой выпуклой линии L_2, рис.4). А так как правильный шестиугольник име-

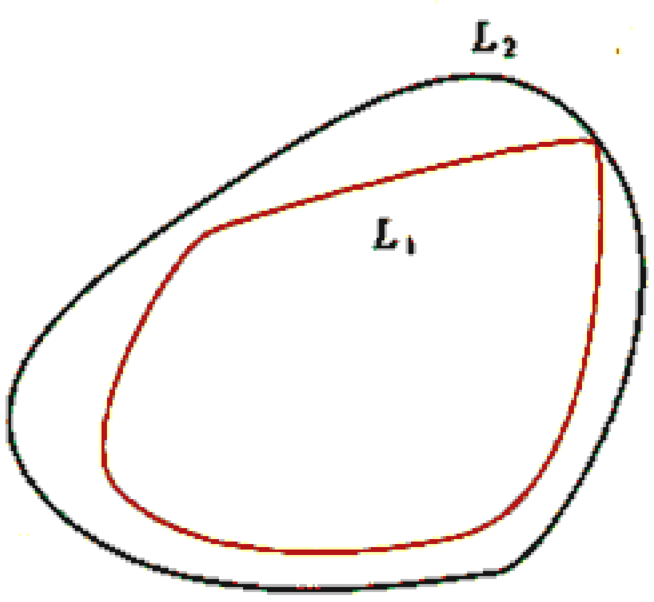

Рис. 4

ет периметр $6r$, то длина окружности с радиусом r несколько больше, чем $6r$, т.е. длина полуокружности несколько больше $3r$. Отношение длины полуокружности к ее радиусу обозначают буквой π, т.е. длина полуокружности равна πr, а длина всей окружности равна $2\pi r$.

Важно заметить, что число π — одно и то же для всех окружностей, т.е. оно не зависит от радиуса. Это

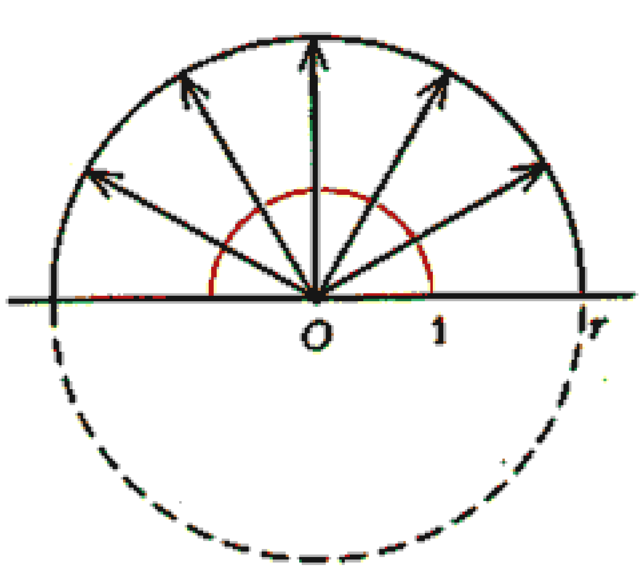

Рис. 5

можно пояснить следующим образом. Обозначим через π длину полуокружности радиусом 1. Полуокружность с радиусом r (с тем же центром O) получается из единичной полуокружности подобным преобразованием (гомотетией) с коэффициентом r (рис.5). Но при подобном преобразовании с коэффициентом r все длины увеличиваются в r раз. Поэтому длина полуокружности с радиусом r получается, если число π мы умножим на r, т.е. она равна πr. А длина всей окружности с радиусом r равна сумме длин двух полуокружностей, т.е. равна $2\pi r$.

Как мы видели, число π немного больше, чем 3. Великий древнегреческий ученый Архимед доказал, что число π заключается между

$$3\frac{1}{7} \approx 3{,}1429 \text{ и } 3\frac{10}{71} \approx 3{,}1409,$$

т.е. им было обосновано приближенное значение $\pi \approx 3{,}14$.

Как измерить длину окружности?

Будем рассматривать углы с вершиной в центре окружности. Полный угол содержит 360°, а длина всей окружности равна $2\pi r$. Из соображе-

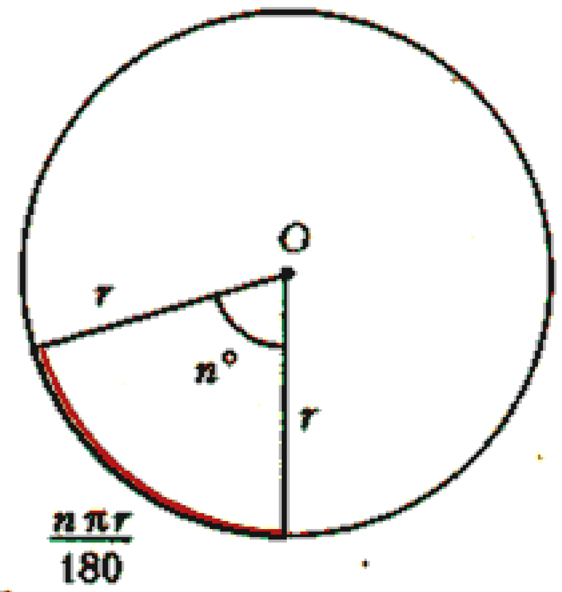

Рис.6

ний пропорциональности, центральный угол, содержащий n градусов, опирается на дугу, длина которой равна

$$l = \frac{n}{360} \cdot 2\pi r = \frac{n\pi r}{180} \qquad (1)$$

(рис.6). Разумеется, длина дуги получается вычисленной в тех же единицах длины, в которых измерен радиус.

В качестве несложной задачи рекомендуем проверить, что если угол измерен в градах (напомним, град — это сотая часть прямого угла), то длина дуги, на которую опирается угол, содержащий k градов, равна

$$l = \frac{k\pi r}{200}.$$

Конечно, можно измерять величины углов не только в градусах (или в градах), но и в других единицах. Наиболее удобной и часто применяемой единицей измерения углов является радиан. Он определяется следующим образом: длина дуги окруж-

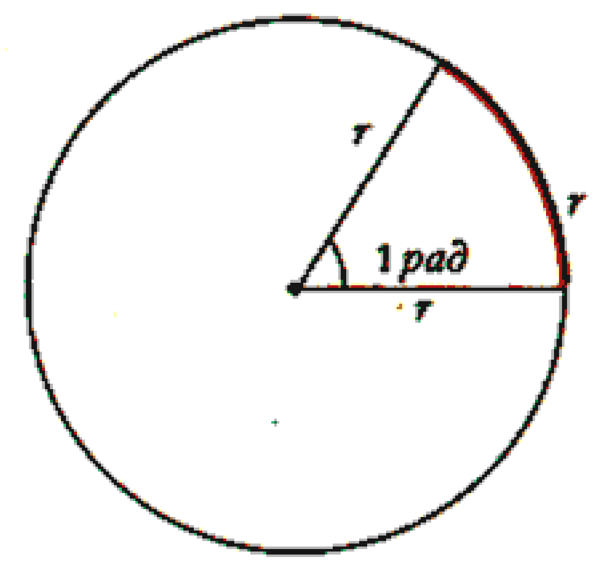

Рис. 7

ности, соответствующей центральному углу в 1 радиан, равна радиусу. А сколько же градусов содержит 1 радиан? По формуле (1) мы находим, что если длина дуги окружности равна радиусу (т.е. $l = r$), то $n = 180/\pi$ (градусов), т.е. 1 радиан содержит $180/\pi \approx 57$ градусов (рис.7). Таким образом, радиан немного меньше 60° (поскольку π немного больше трех).

Из определения радиана непосредственно следует, что центральный угол, содержащий α радианов, опирается на дугу окружности, длина которой равна αr, т.е. формула (1) заменяется следующей простой формулой (рис.8):

$$l = \alpha r. \qquad (2)$$

Именно простота этой формулы и является причиной, по которой углы наиболее удобно измерять в радианах. В частности, полный угол содер-

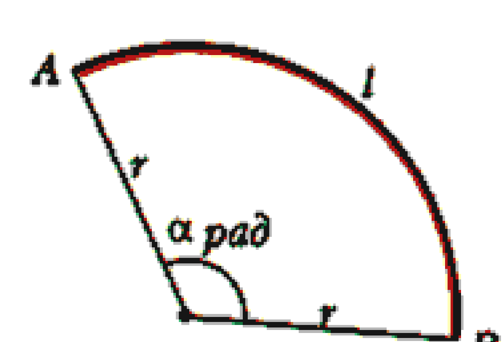

Рис. 8

жит 2π радианов (т.е. примерно 6,28 радианов), поскольку длина всей окружности равна $2\pi r$.

А теперь вернемся к задаче, рассмотренной в начале статьи. Если угол между двумя радиальными дорожками содержит α радианов, то длина дорожки, идущей по окружности, равна αr. Длина же дорожки, идущей через центр, равна $2r$. Значит, при $\alpha r < 2r$ выгоднее идти по дуге окружности. Итак, если угол между радиальными дорожками меньше двух радианов (что составляет $\approx 114°$), то дорожка, идущая через центр, менее выгодна.

Площадь сектора круга

Рассмотрим сектор круга с центральным углом α (радианов) и вписанный в него равнобедренный треугольник (рис.9). Основание и высоту

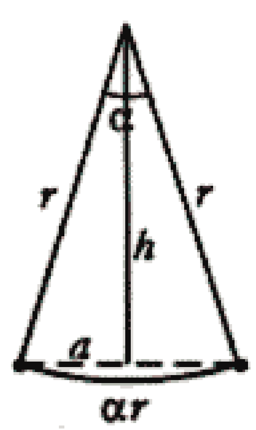

Рис. 9

треугольника обозначим через a и h соответственно. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}ah$. Если угол α мал, то $h \approx r$ и $a \approx l = \alpha r$. Поэтому площадь треугольника примерно равна $\frac{1}{2}\alpha r \cdot r = \frac{\alpha}{2} r^2$. Значит, если мы рассмотрим вписанный в круг правильный n-угольник (рис.10), то мы получим n таких треугольников, и в каждом из них центральный угол равен $\alpha = 2\pi/n$. Площадь всего многоугольника примерно равна

$$n \cdot \frac{1}{2}\alpha r \cdot r = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} r \cdot r = \pi r^2.$$

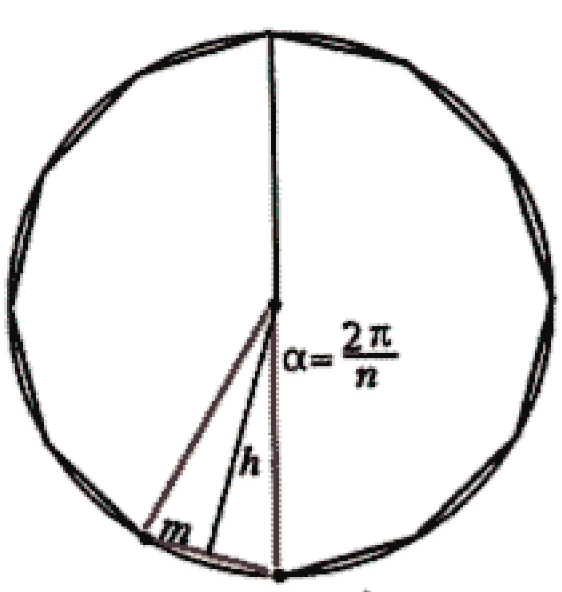

Рис. 10

Но чем больше n, тем точнее площадь правильного вписанного многоугольника совпадает с площадью круга. А так как при любом n площадь многоугольника примерно равна одной и той же величине πr^2, то площадь круга *точно* равна πr^2.

Круг можно рассматривать как сектор, у которого центральный угол содержит 2π (радианов). Так как площадь круга равна πr^2, то (из соображений пропорциональности) площадь сектора с центральным углом α радианов равна

$$s = \frac{\alpha}{2} r^2. \qquad (3)$$

Вернемся теперь к нашим дорожкам и рассмотрим случай, когда оба пути (по дуге окружности или по двум радиусам) имеют одинаковую длину $2r$. Это будет в том случае, когда радиальные дорожки составляют между собой угол 2 радиана (т.е. примерно 114°). Значит, площадь сектора (рис.11), заключенного между обеими дорожками, согласно формуле (3) равна r^2, т.е. этот сектор равновелик квадрату со стороной r.

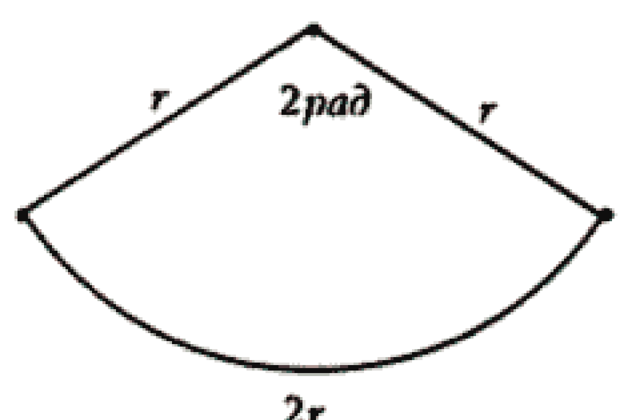

Рис. 11

Таким образом, решение задачи о дорожках можно сформулировать еще и следующим образом: рассмотрим фигуру F (меньшую полукруга), которая заключена между двумя дорожками (одна дорожка идет по двум радиусам, другая – по дуге окружности); если площадь фигуры F меньше r^2, то более короткой является дорожка, идущая по дуге окружности, а если эта площадь больше r^2, то выгоднее идти по двум радиусам.

Перейдем в пространство

Обратил ли читатель внимание на замечательный факт: и в формуле (2), выражающей длину дуги окружности, и в формуле (3), дающей площадь сектора круга, присутствует одно и то же число π?

Более того, это же число π присутствует и в формулах пространственной геометрии. Старшеклассники знают, что площадь поверхности сферы с радиусом r равна $4\pi r^2$, а объем ограниченного ею шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Можно рассмотреть и пространственный аналог задачи о дорожках. Именно, рассмотрим конус с вершиной в центре шара. В пересечении с шаром он дает тело (рис.12), поверх-

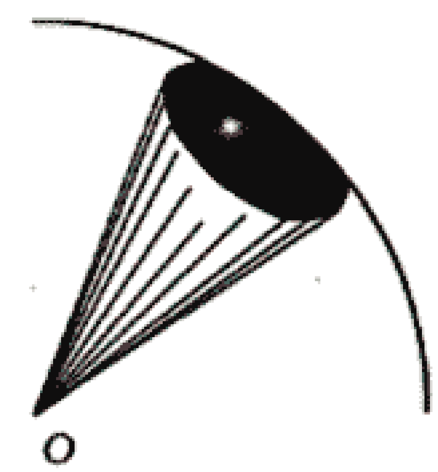

Рис. 12

ность которого состоит из двух частей: боковой поверхности конуса и сферической «шапочки» (сравните с рисунком 6, где сектор есть пересечение угла и круга). Какая из этих двух частей имеет большую площадь поверхности? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо условиться о том, как измерять пространственные углы. Условимся говорить, что конус с вершиной в центре шара содержит пространственный угол, который имеет величину S/r^2 *стерадианов*, где S – площадь поверхности той сферической «шапочки», которую высекает конус из сферы. Таким образом, полный пространственный угол вокруг точки O содержит 4π стерадианов. Можно доказать, что если угол между образующей и осью конуса равен φ, то этот конус содержит $2\pi(1-\cos\varphi)$ стеррадианов.

Теперь ответ на поставленный выше вопрос ясен: боковая поверхность конуса имеет площадь $\pi r^2 \sin\varphi$, а сферическая «шапочка» имеет площадь $2\pi r^2(1-\cos\varphi)$. Отношение этих площадей равно

$$\frac{\pi r^2 \sin\varphi}{2\pi r^2(1-\cos\varphi)} = \frac{\cos\varphi/2}{2\sin\varphi/2}.$$

Если это отношение меньше единицы, то «более выгодной» (т.е. имеющей меньшую площадь) будет боковая поверхность конуса. Равенство достигается при $\cos\varphi/2 = 2\sin\varphi/2$, т.е. при $\operatorname{tg}\varphi/2 = 1/2$. Можно подсчитать, что в этом случае пространственный угол конуса содержит $4\pi/5$ стерадианов.

Читатель, знакомый с понятиями многомерной геометрии, может задать вопрос о том, что будет в n-мерном пространстве. Входит ли число π в формулы для объема n-мерного шара и величины его поверхности? Ответ удивителен: при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ в эти формулы входит (с некоторым рациональным коэффициентом) число π^k, т.е. объем шара равен $\lambda_n\pi^n r^n$, а величина поверхности сферы равна $\lambda_n n\pi^n r^{n-1}$, где λ_n — некоторое рациональное число. Например, для четырехмерного пространства $\lambda_4 = 1/2$. Читатель, умеющий интегрировать и владеющий понятиями многомерной геометрии, может найти, что $\lambda_{2m} = 1/m!$, а $\lambda_{2m+1} = 2^{m+1}/(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1))$.

Что такое экстремум?

Рассмотрим теперь скверик с более сложной системой дорожек, среди которых, кроме радиальных, есть дорожки в форме окружностей разных радиусов (рис.13). Какой путь, соединяющий точки A и B, является наиболее коротким? Читатель теперь без труда сможет ответить на этот вопрос: если угол AOB (не превосходящий развернутого) меньше двух радианов, то наиболее коротким является путь, состоящий из отрезка AM и дуги MB окружности. Если же угол AOB больше двух радианов, то

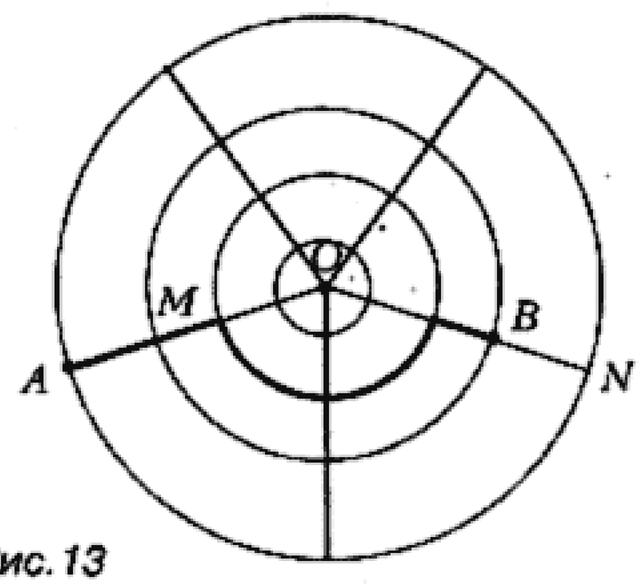

Рис. 13

наиболее коротким является радиальный путь AOB.

А теперь посмотрим на эту задачу с общей математической точки зрения. Мы имеем несколько различных путей в скверике, ведущих из точки A в точку B (среди них радиальный путь AOB и различные пути, включающие дуги окружностей, например путь, вычерченный жирной линией на рисунке 13). Иными словами, мы имеем некоторое множество путей, ведущих из A в B. Обозначим это множество через S. Каждому пути x (т.е. каждому элементу $x \in S$) сопоставлена его длина, которую обозначим через $l(x)$. Таким образом, на множестве S задана функция $l(x)$. Рассмотренная задача о дорожках состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции $l(x)$, заданной на множестве S.

Наименьшее и наибольшее значения функции называют ее экстремальными значениями. Старшеклассники знают, что если задана числовая функция (определенная на некотором интервале и принимающая действительные значения) и если эта функция дифференцируема, то ее экстремальные значения можно найти, приравнивая нулю производную. В этом состоит теорема, принадлежащая Ферма — замечательному математику, внесшему большой вклад в развитие математического анализа и теории чисел.

Но современная математика рассматривает не только числовые функции, заданные на интервалах, но и функции, рассматриваемые на более сложных множествах. Например, множество (или, как говорят в этих случаях математики, «пространство») может состоять из различных траекторий ракет, производственных планов предприятий, выпуклых фигур, различных форм крыла и т.п. На таком пространстве рассматривается некоторая функция (расход горючего, объем производства, площадь, аэродинамическое сопротивление и т.п.). И задача состоит в том, чтобы найти экстремальные значения рассматриваемой функции, например наиболее выгодную траекторию полета ракеты с точки зрения минимального расхода горючего. Рассмотренная задача (схематически показанная на рисунке 13) тоже относится к числу экстремальных задач.

Современная математика состоит не только из геометрии, алгебры, анализа. Она насчитывает десятки различных направлений, и большинство разделов современной математики (как «чистой», теоретической математики, так и прикладной) связаны с решением тех или иных экстремальных задач.