ким образом, $DM = OD \cdot |\operatorname{ctg} 3\alpha|$, но

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{2}{11}.$$

Теперь искомые величины находятся без труда.

4. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.
Указание. Возводя в квадрат обе части первого уравнения и исключая из полученной системы y с помощью формулы $2\cos^2 y = \cos 2y + 1$, придем к уравнению

$$\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2\sin 2x \cdot \cos^2 2x.$$

5. $6\sqrt{\frac{17}{13}}$; $\frac{18}{\sqrt{53}}$; $\frac{66}{\sqrt{173}}$.
Решение. 1) Пусть N_1 — проекция точки N на плоскость $ABCD$ (рис. 7), E — основание перпендикуляра, опущенного из точки

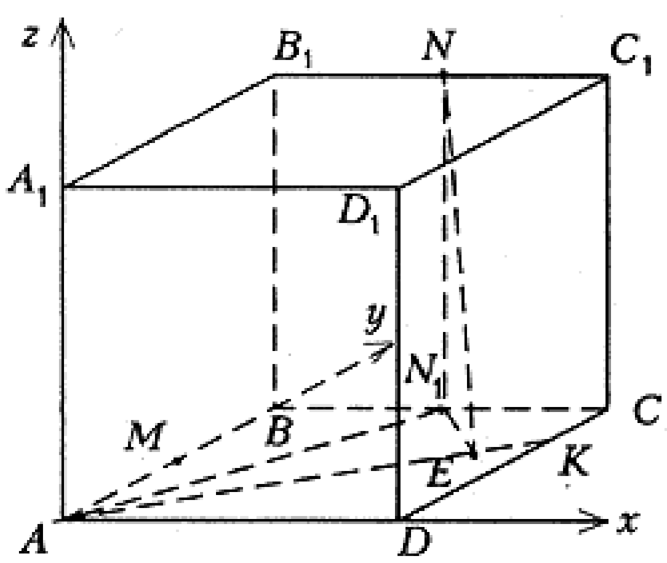

Рис. 7

N на AK, S_1 — площадь треугольника AN_1K, h_1 — расстояние от точки N до AK ($NE \perp AK$ по теореме о трех перпендикулярах). Используя условия задачи, найдем площади S_2, S_3, S_4 треугольников ADK, KCN_1 и N_1BA и тогда

$$S_1 = 36 - (S_2 + S_3 + S_4) = 12, \quad N_1E = \frac{2S_1}{AK},$$

где

$$AK = 6\sqrt{1+\frac{4}{9}} = 2\sqrt{13}, \quad N_1E = \frac{12}{\sqrt{13}},$$

$$h_1 = \sqrt{NN_1^2 + N_1E^2} = 6\sqrt{\frac{17}{13}}.$$

2) Для нахождения расстояния r между MN и AK воспользуемся формулой

$$r = \frac{6v}{AK \cdot MN \cdot \sin\varphi}, \qquad (1)$$

где v — объем пирамиды $AMNK$, φ — угол между MN и AK. Для этого введем систему координат (см. рис. 7). Вычисляя координаты векторов $\vec{MN}$ и $\vec{AK}$, находим $\cos\varphi$ (по формуле скалярного произведения), а затем и $\sin\varphi$, v и r по формуле (1).

3) Если плоскость перпендикулярна вектору $\vec{n} = (a; b; c)$ и проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то уравнение плоскости записывается в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \qquad (2)$$

а расстояние h от точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ до этой плоскости выражается формулой

$$h = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (3)$$

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости MNK, найдем, пользуясь тем, что $\vec{n} \perp \vec{MK}$ и $\vec{n} \perp \vec{MN}$, после чего h без труда получим из формулы (3).

Вариант 3

1. $2\sqrt{3}$.
2. $\frac{2(ab + a + 1)}{ab + 3a + 2}$.
3. 1) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $f_{\max} = 2$, $f_{\min} = 1$. *Указание.* Поскольку

$$f(x) = g(t) = \frac{2(t-2)}{3t-4},$$

где $t = \sin^2 2x$, задача сводится к отысканию минимума и максимума функции $g(t)$, возрастающей на промежутке $[0; 1]$.

4. $(-2; 0)$, $(-3; 0)$, $(-4; 2)$. *Указание.* Решите каждое из уравнений системы как квадратное относительного x или y.
5. Радиус основания конуса $r = \frac{a}{4}$, радиус шара

$$R = \frac{a\sqrt{13}\left(8 - 3\sqrt{3}\right)}{74\sqrt{3}}.$$

Физика

Вариант 1

1. Скорость слипшихся брусков v_1 можно найти из закона сохранения импульса $3mv_1 = mv$. Кинетическая энергия брусков $E_k = 3mv_1^2/2$. Модуль работы силы трения $A = 3\mu mgl$. По закону сохранения энергии $E_k = A$. Отсюда находим расстояние l, пройденное брусками до остановки:

$$l = v^2/(18\mu g) \approx 41 \text{ см}.$$

2. 1) Изображение S' нити накала лампочки в зеркале находится на расстояниях l_1 от плоскости зеркала и $x = 2l_1 + l_2 = 5$м от противоположной стены, что следует из правил построения изображения в плоском зеркале (рис. 8). 2) После отра-

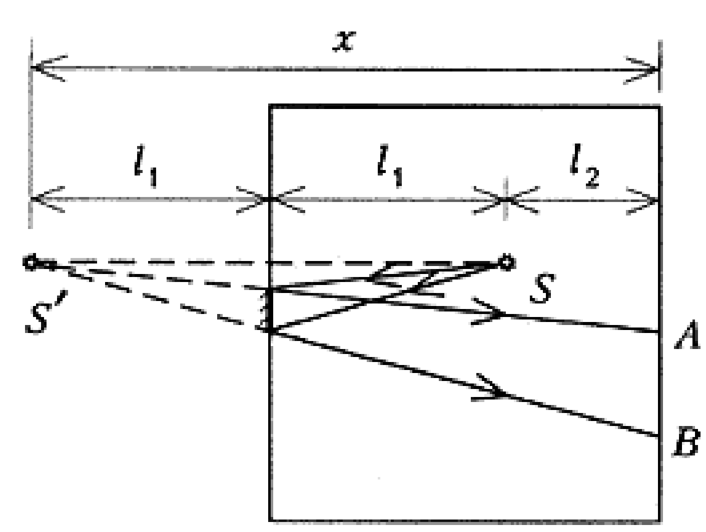

Рис. 8

жения от зеркала световые лучи ограничены конической поверхностью $S'AB$. Плоскости зеркала и противоположной стены дают два сечения этой поверхности, которые подобны. Значит, «зайчик» AB будет иметь форму ромба с линейными размерами в $k = x/l_1 = 2{,}5$ раза большими размеров зеркала. Итак, «зайчик» имеет форму ромба с диагоналями 40 см и 30 см.

3. 1) Разность давлений у нижнего и верхнего концов левого вертикального колена равна ρgH (это следует из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на вертикальное направление для столба воды в этом колене). Следовательно, давление в месте изгиба трубки на оси вращения составляет

$$p_1 = p_0 + \rho gH.$$

2) Центр масс горизонтального столба воды движется с ускорением $\omega^2 L/2$, которое обеспечивается разностью давлений в местах изгиба трубки: $p_3 - p_1 = \rho\omega^2 L^2/2$. Разность давлений на концах колена высотой h равна $p_3 - p_2 = \rho gh$. Отсюда

$$p_2 = p_0 + \rho g(H - h) + \rho\omega^2 L^2/2.$$

4. Процесс идет при постоянном давлении $p \approx 10^5$ Па. Пусть в начале опыта объемы пара и воды равны $V_п$ и $V_в$ соответственно. Тогда можно записать

$$pV_п = \frac{m_п}{M}RT, \quad p\beta V_п = \frac{m_п + \rho_в V_в}{M}RT,$$

где $m_п$ — начальная масса пара, $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — мо-