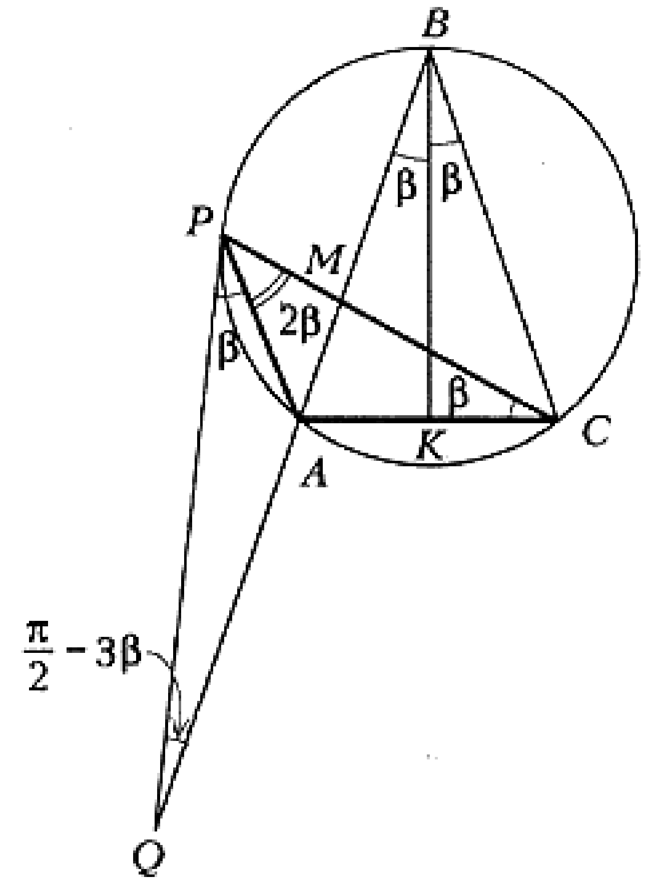

Рис. 4

$y = f(x)$ и прямой l, заданной уравнением $y = g(x)$, где $g(x) = 4a^2x + 5$.

Площадь S рассматриваемой фигуры определяется формулой

$$S = \left|\int_0^{-2a}(g(x)-f(x))\,dx\right| = \left|\int_0^{-2a}(2x^3+8ax^2+8a^2x)\,dx\right| = \frac{8a^4}{3}.$$

По условию $S = \frac{27}{2}$ и поэтому $a = -\frac{3}{2}$, так как $a < 0$, а $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.

2) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, задаваемая уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, пересекает ось Oy в точке с ординатой $b(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, и мы должны найти наименьшее значение $b_{\min}$ функции $b(x) = f(x) - f'(x)x$, что нетрудно сделать.

5. $BC = 5\sqrt{6}$, угол между плоскостями D_1DC и ABC равен $\arccos\frac{1}{5}$, расстояние от точки D до центра сферы равно 12.

Указание. Пусть $\angle D_1DA = \angle D_1DC = \alpha$, где α — острый угол (рис.5). Двугранные углы при ребрах DA и DC равны между

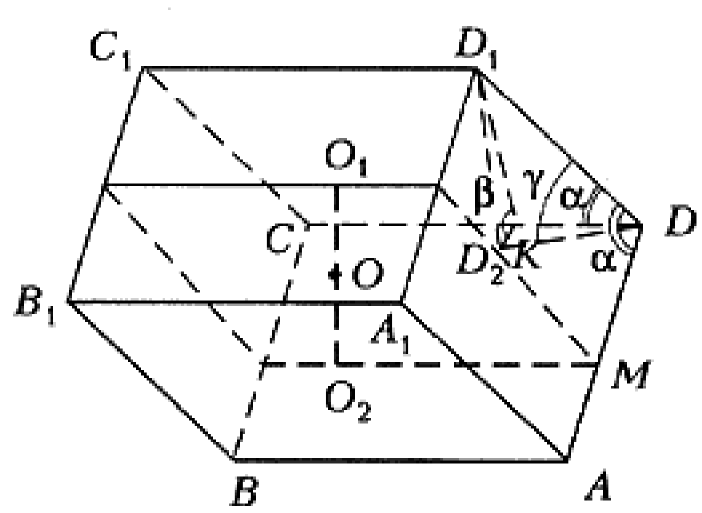

Рис. 5

собой и являются острыми (каждый из этих углов обозначим β).

Пусть O — центр вписанной в призму сферы, O_1 и O_2 — проекции точки O на грани $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$. Тогда $OO_1 = OO_2 = R$, где R — радиус сферы.

Сечения призмы плоскостями, проходящими через O_1O_2 и перпендикулярными ребрам AD и DC, являются ромбами с острым углом β, описанными около окружности радиуса R, а из равенства ромбов следует, что $ABCD$ — квадрат.

Пусть D_2 — проекция точки D_1 на плоскость $ABCD$, тогда $D_1D_2 = 2R$. Проведем через D_1D_2 плоскость, перпендикулярную DC и пересекающую DC в точке K. Тогда D_1D_2K, D_1D_2D и D_1DK — прямоугольные треугольники, $\angle D_1DD_2 = \gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$ (по условию), $\angle D_1KD_2 = \beta$. Так как отрезок D_1K равен стороне ромба, т.е. $D_1K = CD$, то

$$D_1D_2 = 2R = D_1K\cdot\sin\beta = CD\cdot\sin\beta,$$

$$D_1D_2 = D_1K\cdot\sin\beta = DD_1\sin\alpha\sin\beta,$$

$$D_1D_2 = DD_1\sin\gamma.$$

Заметим еще, что точка D_2 лежит на диагонали квадрата $ABCD$ и поэтому

$$D_2DK = \frac{\pi}{4},\ D_1D_2 = DD_2\cdot\operatorname{tg}\gamma,$$

где

$$DD_2 = \frac{DK}{\cos\frac{\pi}{4}},\ DK = DD_1\cos\alpha,$$

и поэтому

$$D_1D_2 = DD_1\frac{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}}.$$

Отсюда получаем

$$\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma = \sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha.$$

Из этих соотношений находим, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta = \frac{1}{5},\ R = 6,$$

а затем, рассмотрев прямоугольные треугольники DOO_2, DMO_2 и DMO, находим DO.

Вариант 2

1. $x_1 = -7,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$.

2. $a \ge \frac{14}{3}$. *Указание*. Исходное неравенство, равносильное неравенству

$$(4a-8)x^2 + (20-10a)x + 7a - 16 \ge 0,$$

является верным при $a = 2$, а при $a \ne 2$ справедливо при всех $x \in \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда $a > 2$ и

$$D = [10(2-a)]^2 - 16(a-2)(7a-16) \le 0.$$

3. Площадь треугольника ABC равна 176, проекция отрезка OM на прямую BC равна $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Указания. 1) Пусть S_1, S_2, S_3 и S — площади треугольников BOM, COM, KOC и ABC соответственно (рис.6). Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{6} = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2\cos2\alpha},$$

откуда $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Искомая площадь $S = 2(S_1 + S_2 + S_3)$, где

$$\frac{S_3}{S_1+S_2} = \frac{OK}{OB} = \frac{KC}{BC} = \cos2\alpha = \frac{3}{5},$$

откуда $S_3 = 33$, $S = 176$.

2) Пусть $D \in BC$ и $OD \perp BC$, тогда DM — проекция OM на BC. Заметим, что точка D расположена либо на отрезке BM, либо на отрезке MC. В первом случае $DM = OD\cdot\operatorname{ctg}\beta$, где $\beta = \angle OMB = 3\alpha$ (по свойству внешнего угла в треугольнике MAC), во втором — $DM = OD\cdot\operatorname{ctg}(\pi - 3\alpha) = -OD\operatorname{ctg}3\alpha$. Та-

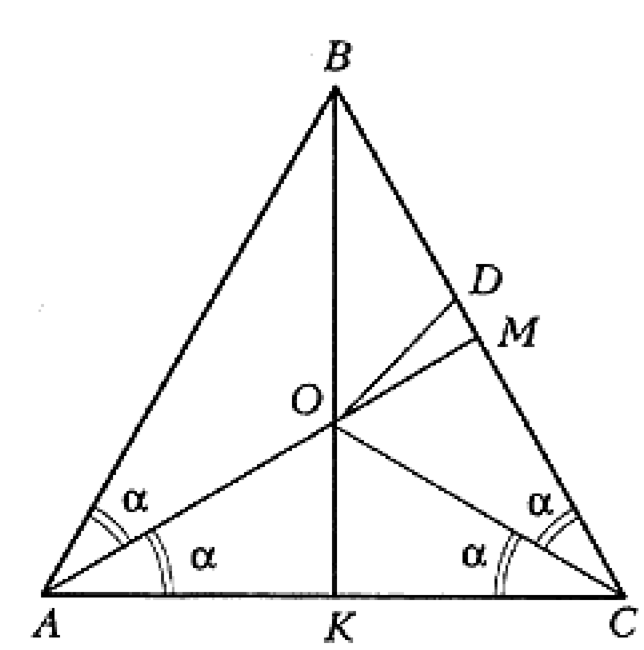

Рис. 6