углов звезды в таком случае равняется сумме углов треугольника MCN.

Так как треугольники ACP и QCB прямоугольные, а MC и NC — их медианы, то углы ACM и CAM равны, как равны и углы BCN и CBN. Угол звезды при вершине M равен сумме углов ACM и CAM, а следовательно, углу CAB. Аналогично, угол звезды при вершине N равен углу CBA, следовательно,

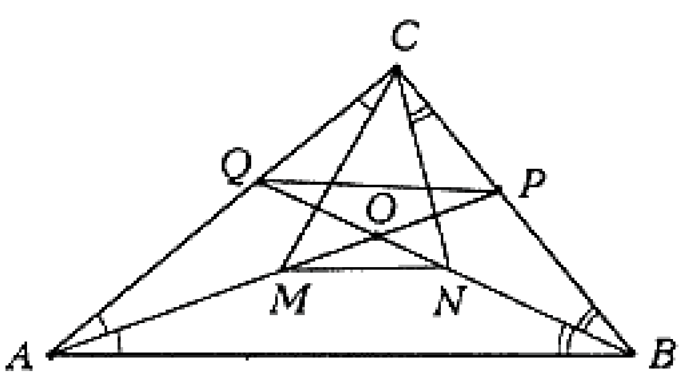

Рис. 2

сумма углов звезды при вершинах M и N равна 90°, а сумма остальных углов звезды также равняется 90°.

3. Для упрощения будем все цены выражать в центах. Если обозначить через N количество украденных журналов, а через x цену одного журнала, то ущерб составит Nx. По условию

$$Nx > 250000. \quad (1)$$

Условие, что 6/7 украденного количества журналов, будучи проданными по цене на 60 центов большей, чем первоначальная, не компенсируют потери, запишется в виде неравенства

$$(x + 60)6N/7 < Nx. \quad (2)$$

А условие, что прибавление одного доллара компенсирует потерю, запишется в виде

$$(x + 60)6N/7 + 100 > Nx. \quad (3)$$

Из неравенства (2) получаем, что $x > 360$. Из неравенства (3) получаем

$$Nx < 360N + 700. \quad (4)$$

Из (1) и (4)

$$250000 < 360N + 700,$$

отсюда $N \geq 693$. С другой стороны, из (4) получаем, что $x < 360 + \frac{700}{N}$. Значит, $360 < x < 360 + 700/N$, но $N \geq 693$, поэтому единственное целое x, удовлетворяющее этому неравенству, есть $x = 361$. Теперь из четвертого неравенства получаем, что $N < 700$. Заметим, что N должно делиться на 7. Единственное число в интервале $693 \leq N \leq 699$, делящееся на 7, это 693. Итак, было украдено 693 журнала, каждый стоимостью 3 доллара 61 цент.

4. Решение этой задачи будет опубликовано в следующем номере журнала.

5. Рассмотрим какие-нибудь три подряд стоящие клетки — прямоугольник 3×1. Нетрудно проверить, что, нажимая только эти клетки, можно погасить все светящиеся клетки этого прямоугольника.

Отсюда следует, что такое же утверждение верно и для квадрата 3×3. В самом деле, пусть A, B и C — трехклеточные столбики этого квадрата. Погасим сначала все клетки левого столбика A, потом правого столбика C и затем среднего столбика B. Заметим, что те кнопки из A и C, которые останутся светящимися, будут расположены симметрично относительно столбика B. Погасив теперь все светящиеся клетки в столбике A, а затем по той же схеме в столбике C, получим, что во всем квадратике не будет светящихся клеток. Действительно, клетки в A и C будут погашены, а клетки в B поменяют свое состояние четное число раз и поэтому также окажутся погашенными.

Такая процедура позволит погасить все клетки в прямоугольнике 3×7. Для этого в нем следует выделить три квадрата 3×3 — один в центре и два по краям — и последовательно гасить в них клетки. А из этого утверждения аналогично выводится утверждение и для всего квадрата 7×7.

МИФ О ДИДОНЕ И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Отверстие на листе можно проделать, например, так, как показано на рисунке 3.

1. $\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Наибольшую площадь имеет равнобедренный

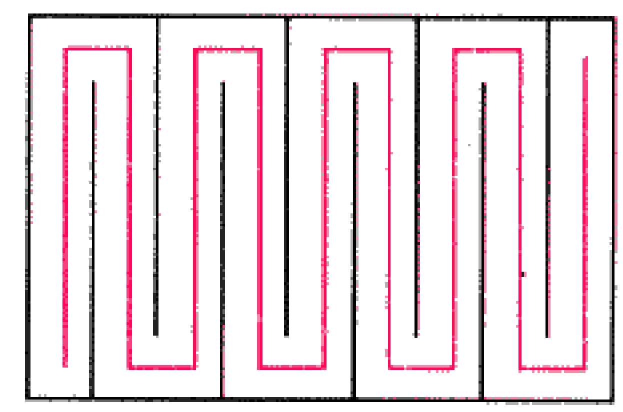

Рис. 3

треугольник с основанием a и углом при вершине, равным α.

2. $6/\sqrt[4]{3}$. Наименьший периметр имеет правильный треугольник площади 1.

3. Докажите, что точки K и M должны делить дугу на три равные части. **4.** Достаточно проверить это неравенство для круга. **5.** Рассмотрим многоугольник, последовательные стороны которого равны заданным отрезкам. (Как мы знаем из задачи 4 статьи, именно для такого многоугольника достигает наибольшего значения площадь.) Поменяем в нем две соседние стороны. Многоугольник останется вписанным, его площадь не изменится, но порядок следования сторон изменится. Так, меняя попарно соседние стороны, мы будем получать вписанные многоугольники с теми же сторонами, следующими в любом порядке. Все они имеют равные площади. **6.** Возьмем некоторый многоугольник заданного вида и пристроим к нему многоугольник, симметричный относительно изменяющейся стороны. Получим многоугольник с заданными сторонами и в два раза большей площадью. Применим к нему утверждение задачи 4. **7.** Отражая симметрично треугольник относительно соответствующих сторон, получим шестиугольник, внутри которого имеется замкнутая линия, ограничивающая фигуру с площадью, равной половине площади шестиугольника. Длина линии будет наименьшей, если эта линия — окружность.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

1. $v = \sqrt{3R_3 g}$.

2. $v = \sqrt{7/8}\,v_0 \approx 9{,}35$ км/с.

3. $\Delta v = -\sqrt{R_3 g R_3/r_1}\left(\sqrt{2 - r_1/a} - 1\right)$.

4. $v = \left(1 + \sqrt{5}\right)v_0/2$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\pi + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $(-3;-2) \cup (-1;0)$. **3.** $PA = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $PQ = 6$. *Указание*. Пусть K — середина AC, M — точка пересечения AB и PC (рис.4), $\angle ABK = \angle CBK = \beta$, где $\beta = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. Тогда $\angle ABC = \angle APC = 2\beta$, $\angle APQ = \angle ACP = \beta$, $\angle PAQ = 2\beta + \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\angle AQP = \frac{\pi}{2} - 3\beta$. Применяя теорему синусов к треугольникам APC и APQ, находим требуемое.

4. $a = \pm\frac{3}{2}$, $b_{\min} = b(2) = -11$. *Решение*. 1) Так как уравнение $-2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5 = 4a^2x + 5$, равносильное уравнению $x(x + 2a)^2 = 0$, имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = -2a$, то точки $A(0;5)$ и $B(2a;5 - 8a^3)$ являются общими точками графика функции