двигателя. Вычислим теперь величину и знак изменения скорости.

Величина скорости v_0, которую должен иметь корабль на круговой орбите радиусом r_2, находится из уравнения движения корабля $v_0^2/r_2 = GM_З/r_2^2$, где $M_З$ — масса Земли. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_З}{r_2}} = \sqrt{R_З g\frac{R_З}{r_2}}.$$

Скорость корабля v_A в точке A до включения двигателя можно найти из соотношения между большой осью эллиптической орбиты и полной энергией корабля (см. задачу 3). Для нашего случая эта связь имеет вид

$$\frac{mv_A^2}{2} - G\frac{mM_З}{r_2} = -G\frac{mM_З}{2a},$$

откуда

$$v_A = \sqrt{G\frac{M_З}{r_2}\left(2-\frac{r_2}{a}\right)} = v_0\sqrt{2-\frac{r_2}{a}}.$$

Поскольку $r_2 > a$, то $v_A < v_0$. Следовательно, для перехода на круговую орбиту необходимо увеличить скорость на величину

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{R_З g\frac{R_З}{r_2}}\left(1-\sqrt{2-\frac{r_2}{a}}\right).$$

Задача 5. *Вычислите приближенно третью космическую скорость, т.е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы (ушла в бесконечность). Влиянием планет Солнечной системы пренебречь. Орбиту Земли вокруг Солнца считать круговой с радиусом $R_{ЗС} = 1{,}5\cdot 10^8$ км и временем обращения $T = 1$ год. Первая космическая скорость $v_к = 7{,}9$ км/с.*

Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом неоднородностью поля солнечного тяготения. Считая массу Земли $M_З$ бесконечно большой по сравнению с массой ракеты m, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v — скорость ракеты у поверхности Земли, $R_З$ — радиус Земли, а v_∞ — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Выразим потенциальную энергию ракеты через круговую скорость спутника Земли, движущегося по круговой орбите вблизи ее поверхности:

$$G\frac{mM_З}{R_З} = mv_к^2.$$

Тогда

$$v_\infty^2 = v^2 - 2v_к^2.$$

На втором этапе, после того как ракета выйдет из зоны земного тяготения, будем рассматривать ее движение в гравитационном поле Солнца. Скорость ракеты в системе координат, связанной с Солнцем, векторно складывается из скорости $\vec{v}_\infty$ и скорости кругового движения Земли вокруг Солнца $\vec{V}$. Найдем, какую скорость (параболическую) $v_п$ должно иметь тело на земной орбите, чтобы уйти из Солнечной системы. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_п^2}{2} - G\frac{mM_С}{R_{ЗС}} = 0,$$

откуда

$$v_п = \sqrt{2G\frac{M_С}{R_{ЗС}}} = \sqrt{2}V.$$

Очевидно, что минимальное значение скорости ракеты v_{min} должно быть в том случае, когда ее скорость направлена вдоль скорости Земли, т.е. $v_п = v_\infty + V$. После подстановки выражений для $v_п$ и v_∞ получим

$$v_{min} = \sqrt{2v_к^2 + V^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}.$$

Поскольку $V = 2\pi R_{ЗС}/T \approx 30$ км/с, а $v_к = 7{,}9$ км/с, то $v_{min} = 16{,}7$ км/с.

Задача 6. *Определите, какую минимальную дополнительную скорость необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, движущемуся по очень высокой круговой орбите, чтобы он смог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, радиус орбиты Земли равен $R_{ЗС} = 1{,}5\cdot 10^8$ км, а радиус орбиты Марса $R_{МС}$ в 1,52 раза больше, чем у Земли.*

«Очень высокая круговая орбита» означает, что радиус орбиты спутника много больше радиуса Земли и что скоростью, которой обладает спутник относительно Земли, можно пренебречь. Но, оставаясь спутником Земли, он движется вместе с Землей относительно Солнца по круговой орбите со скоростью

$$V = \sqrt{GM_С/R_{ЗС}} \approx (2\pi R_{ЗС})/T \approx 30 \text{ км/с},$$

где M — масса Солнца, T — время обращения Земли вокруг Солнца. Если мы будем добавлять спутнику скорость вдоль направления скорости Земли, то он будет двигаться по эллиптическим орбитам, большая ось которых больше диаметра орбиты Земли и растет по мере увеличения добавочной скорости. Очевидно, что цель будет достигнута, когда точка максимального удаления спутника достигнет круговой орбиты Марса. Такая траектория (полуэллипс) показана на рисунке 5 штриховой линией, большая ось орбиты равна $2a = R_{ЗС} + R_{МС}$.

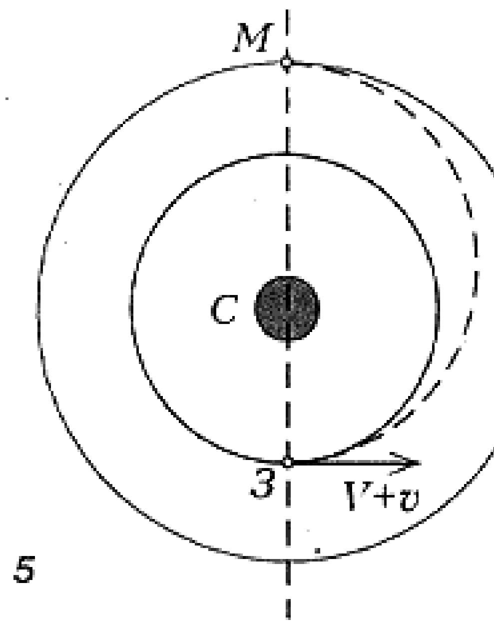

Рис. 5

Полная энергия спутника массой m на данной орбите составляет

$$E = \frac{m(V+v)^2}{2} - G\frac{mM_С}{R_{ЗС}} = \frac{m(V+v)^2}{2} - mV^2 = \frac{m\left(v^2+2Vv-V^2\right)}{2}.$$

Используем связь между большой осью эллипса и полной энергией спутника:

$$R_{ЗС} + R_{МС} = \frac{2GM_С}{V^2-2Vv-v^2} = \frac{2V^2R_{ЗС}}{V^2-2Vv-v^2}.$$

После простых преобразований, относительно добавочной скорости v получим квадратное уравнение

$$v^2 + 2Vv - \frac{(R_{МС}-R_{ЗС})V^2}{R_{МС}+R_{ЗС}} = 0,$$

которое имеет два корня:

$$v_1 = V\left(\sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС}+R_{ЗС}}}-1\right) \approx 2{,}95 \text{ км/с},$$

$$v_2 = -V\left(1+\sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС}+R_{ЗС}}}\right) \approx -62{,}95 \text{ км/с}.$$

Нашему случаю соответствует первый корень, а второй корень отвечает случаю, когда дополнительная скорость будет направлена в противоположную сторону.