Вторая космическая скорость для планеты соответствует скорости тела на поверхности планеты, при которой полная энергия тела равна нулю. Для однородной планеты массой M и радиусом R это условие имеет вид

$$\frac{v^2}{2}-G\frac{M}{R}=0.$$

В случае неоднородной планеты плотность вещества, заполняющего полость, равна $\rho = 3\beta M/\left(4\pi R^3\right)$. Будем рассматривать эту полость как суперпозицию двух полостей, одна из которых заполнена веществом плотностью $\rho_0 = 3M/\left(4\pi R^3\right)$, а другая — плотностью $\rho_1 = 3(\beta-1)M/\left(4\pi R^3\right)$. Очевидно, что потенциальная энергия тела на поверхности такой планеты будет равна сумме потенциальных энергий однородной планеты и шара с радиусом полости и плотностью ρ_1.

Минимальная величина второй космической скорости будет в той точке поверхности планеты, где потенциальная энергия минимальна по абсолютной величине. Этой точкой будет точка A (см. рис.2). Обозначим для нее величину второй космической скорости через v_1, тогда условие равенства нулю полной энергии тела в точке A будет иметь вид

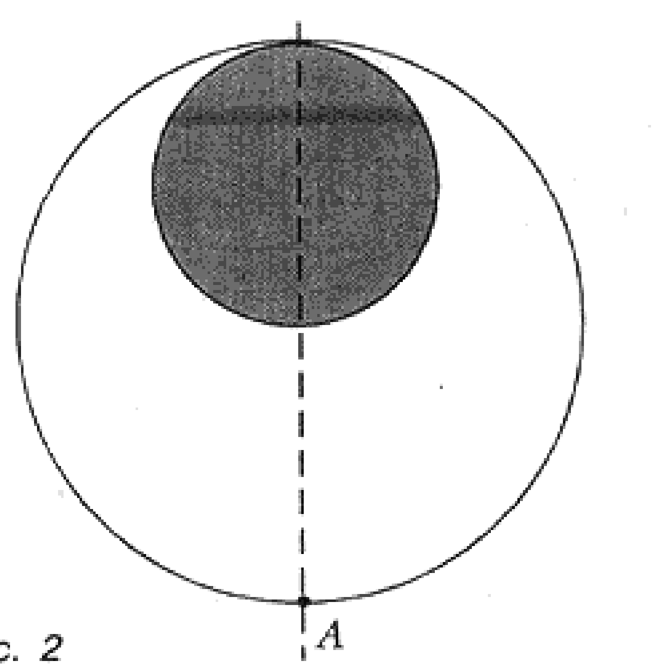

Рис. 2

$$\frac{v_1^2}{2}-G\frac{M}{R}-G\frac{\alpha^3(\beta-1)M}{(\alpha+1)R}=0,$$

или, после подстановки численных значений α и β,

$$v_1^2-\frac{13}{6}G\frac{M}{R}=v_1^2-\frac{13}{12}v^2=0.$$

Отсюда получаем

$$v_1=\sqrt{\frac{13}{12}}\,v\approx 12{,}5\ \text{км/с}.$$

Задача 3. *Для спутников, движущихся вокруг Земли по эллиптическим орбитам, выразите длину большой оси эллипса через полную энергию спутника E (кинетическая плюс потенциальная).*

Рассмотрим эллиптическую орбиту спутника, изображенную на рисунке 3.

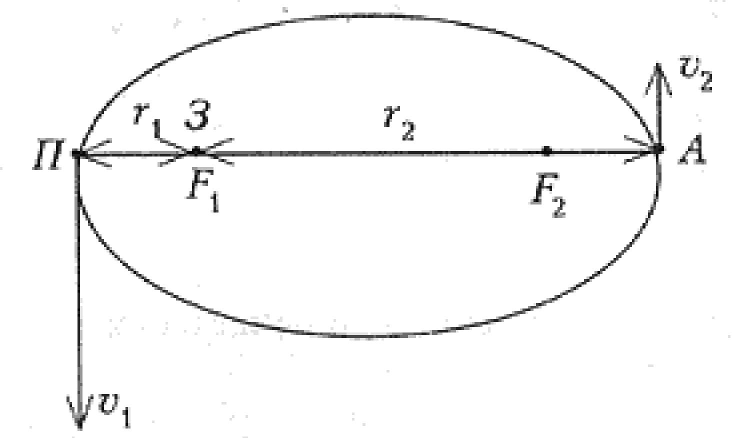

Рис. 3

Пусть в одном из фокусов эллипса находится Земля (например, в F_1). Тогда точка A (афелий) соответствует максимальному удалению спутника от Земли, а точка $П$ (перигелий) является точкой минимального удаления. Длину отрезка $ПF_1$ обозначим через r_1, а длину отрезка F_1A — через r_2. В этих обозначениях длина большой оси равна $2a = r_1 + r_2$.

Запишем полную энергию спутника для точки $П$:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{GmM_З}{r_1}=E,$$

где m — масса спутника, v_1 — его скорость, а $M_З$ — масса Земли. Воспользуемся вторым законом Кеплера (законом площадей): радиус-вектор спутника в равные промежутки времени описывает равные площади. Из этого закона для точек орбиты спутника A и $П$ можно записать

$$v_1r_1=v_2r_2.$$

Обозначим это произведение через L. Выражая v_1 через L и подставляя в выражение для полной энергии, получим относительно r_1 квадратное уравнение

$$r_1^2+G\frac{mM_З}{E}r_1-\frac{mL^2}{2E}=0.$$

Это уравнение имеет два решения, которые соответствуют нашим двум точкам A и $П$ (поскольку коэффициент при r_1 и свободный член данного уравнения одинаковы для этих точек). Поэтому получаем

$$r_1=-G\frac{mM_З}{2E}-\sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2+\frac{mL^2}{2E}},$$

$$r_2=-G\frac{mM_З}{2E}+\sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2+\frac{mL^2}{2E}}.$$

Отсюда находим большую ось эллиптической орбиты спутника:

$$2a=r_1+r_2=-G\frac{mM_З}{E}.$$

Следует напомнить, что полная энергия E величина отрицательная — полная энергия при финитном движении всегда является отрицательной величиной.

Обсудим физический смысл полученного соотношения. При фиксированном значении полной энергии спутник может двигаться по большому семейству эллиптических орбит, но все эти орбиты будут иметь одну и ту же большую ось. А если мы знаем величину большой оси эллипса орбиты спутника, то мы однозначно можем вычислить полную энергию спутника. Естественно, что полученная связь имеет место не только для спутников Земли, но и для орбит планет Солнечной системы, для спутников других планет — главное, чтобы это были спутники, т.е. тела, масса которых много меньше массы тела, вокруг которого они вращаются.

Задача 4. *Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая ось которой равна*

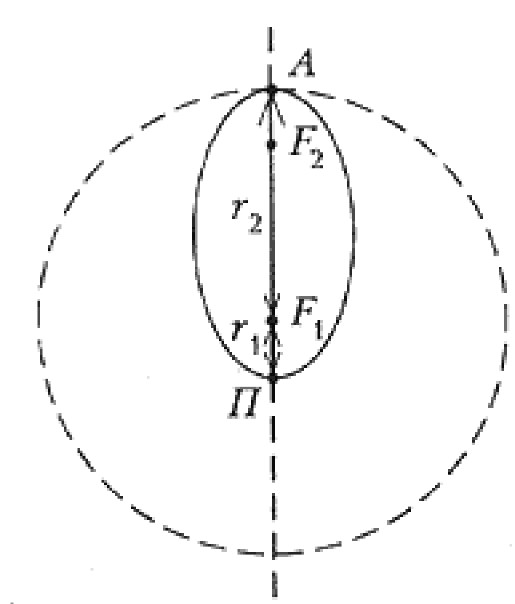

Рис. 4

2a. Центр Земли расположен в фокусе эллипса F_1 (рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке максимального удаления и расстояние от центра Земли до корабля равно r_2, на короткое время включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом r_2? Считать известными ускорение свободного падения g на поверхности Земли и радиус Земли $R_З$.

Поскольку речь идет о переходе на круговую орбиту, новая скорость корабля должна быть перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему центр Земли и центр масс корабля, а следовательно, и вектор изменения скорости корабля должен быть направлен вдоль скорости корабля перед включением