# Движение тел в гравитационных полях

В.МОЖАЕВ

Мы БУДЕМ рассматривать относительно слабое гравитационное взаимодействие между телами, когда эти тела покоятся или достаточно медленно движутся (по сравнению со скоростью света). В этом случае справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Он утверждает, что две любые материальные частицы (тела, линейные размеры которых много меньше расстояния между ними) с массами $m_1$ и $m_2$ притягиваются друг к другу с силой $F$, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния $r$ между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Коэффициент пропорциональности $G$ называют гравитационной постоянной. По современным данным $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$.

В ньютоновской теории тяготения справедлив принцип суперпозиции гравитационных полей — сила тяготения, действующая на данную частицу со стороны многих других частиц, является векторной суммой сил, действующих на частицу со стороны каждой из частиц, и каждая из этих сил не зависит от действия других сил.

Из закона Ньютона следует, что гравитационное поле — потенциальное поле. При перемещении тела в таком поле по любой замкнутой траектории работа, совершенная полем, равна нулю. Из потенциальности гравитационного поля следует также связь между силой тяготения $F$, действующей на материальную частицу, и ее потенциальной энергией $U$. В случае сферически симметричного гравитационного поля эта связь имеет вид

$$F_r = -\frac{dU}{dr},$$

где $F_r$ — проекция силы на направление радиуса-вектора $\vec{r}$.

Ниже на конкретных примерах мы рассмотрим сферически симметричные гравитационные поля и движения тел в этих полях.

**Задача 1.** *1) Приняв за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии бесконечность, найдите потенциальную энергию тела массой $m$ в гравитационном поле Земли. Землю считайте однородным шаром массой $M_З$ и радиусом $R_З$. Рассмотрите случаи, когда тело находится вне и внутри Земли. 2) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли сможет удалиться небольшое тело массой $m$, если ему сообщить начальную скорость, равную первой космической скорости $v_к$?*

1) Рассмотрим сначала случай, когда тело массой $m$ находится на произвольном расстоянии $r$ от центра Земли и $r \ge R_З$. В этом случае на тело действует гравитационная сила, равная $F = -GmM_З/r^2$ и направленная к центру Земли. Используем связь $F = -dU/dr$, где $U$ — потенциальная энергия тела в поле Земли. Отсюда $U = -\int F dr + C_1$, где $C_1$ — некоторая константа, которую найдем из условия, $U(\infty) = 0$. После подстановки выражения для силы получим

$$U(r) = -G\frac{mM_З}{r}.$$

Очевидно, что $C_1 = 0$.

Теперь рассмотрим ситуацию при $r < R_З$. В этом случае $F = -GmM_З r/R_З^3$ (покажите это). Тогда $U(r) = \int GmM_З r dr/R_З^3 + C_2$. Константа $C_2$ находится из граничного условия $U(R_З) = -GmM_З/R_З$. После подстановки получим, $C_2 = -3GmM_З/(2R_З)$, следовательно,

$$U(r) = G\frac{mM_З}{R_З}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_З}\right)^2 - \frac{3}{2}\right).$$

Общая зависимость $U(r)$ показана на рисунке 1. Очевидно, что такая же зависимость будет иметь место не только для гравитационного поля Земли, но и для поля любого тела в виде однородного (по плотности) шара, если вместо массы Земли в полученные выражения подставить массу данного шара.

Изображенную на рисунке 1 зависимость $U(r)$ обычно называют потенциальной ямой. Это название связано с тем, что, если полная энергия тела, находящегося в таком поле, меньше нуля, то это тело оказывается как бы запертым в яме, т.е. оно не сможет уйти от Земли на бесконечность и будет совершать финитное движение. Максимально возможное удаление тела определяется границей (стенкой) ямы, при достижении которой скорость тела становится равной нулю и тело возвращается обратно.

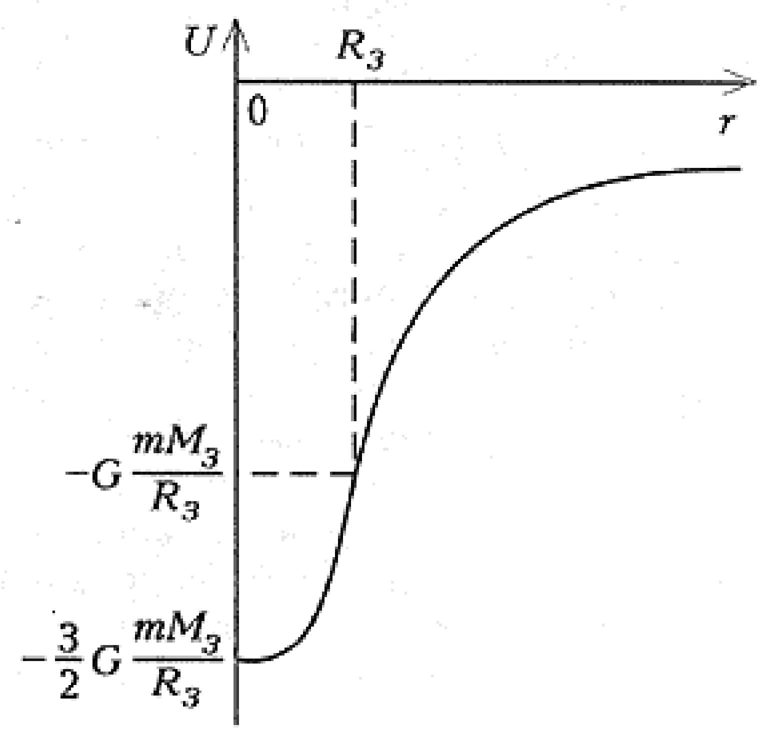


*Рис. 1*

2) При фиксированной величине начальной скорости $v_0$ тело сможет максимально удалиться от поверхности Земли, если его скорость будет направлена по радиусу. Это удаление $H$ находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = -G\frac{mM_З}{R_З + H},$$

откуда

$$H = \frac{R_З}{2GM_З/(R_З v_0^2) - 1}.$$

Первая космическая скорость равна $v_к = \sqrt{GM_З/R_З}$. После подстановки получим

$$H = R_З.$$

**Задача 2.** *Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна $v = 12$ км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью, заполненной веществом с плотностью в $\beta = 2$ раза больше плотности планеты (рис.2). Отношение радиуса полости к радиусу планеты $\alpha = 1/2$.*

---

*Тема этой статьи несколько выходит за рамки школьного курса физики. Однако рассмотренные в статье задачи неоднократно предлагались на вступительных экзаменах в вузы, например — в Московский физико-технический институт.* (Прим. ред.)