AB. При этом площадь фигуры увеличится, а периметр не изменится.

Пусть теперь M — любая точка на границе фигуры, отличная от A и B (рис.5). Докажем, что $\angle AMB = 90°$.

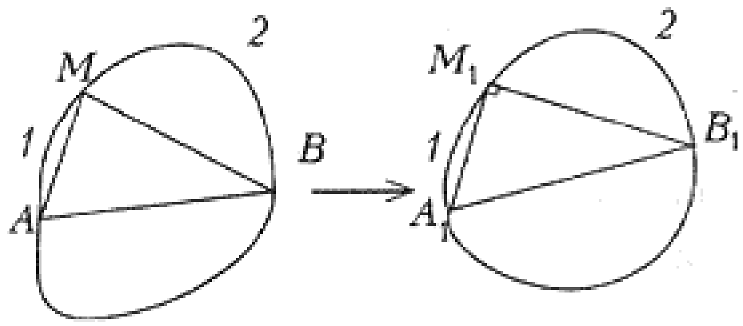

Рис. 5

Предположим, что это не так. Проведем отрезки AM, MB и AB, они разрежут нашу фигуру на четыре части. Построим новую фигуру следующим образом. Сначала строим прямоугольный треугольник $A_1M_1B_1$, в котором $A_1M_1 = AM$, $M_1B_1 = MB$, $\angle A_1M_1B_1 = 90°$. Приставим к его катетам сегменты, равные сегментам *1* и *2* (см. рис.5), после чего отразим все относительно гипотенузы A_1B_1. Получим новую фигуру с тем же периметром и большей площадью. Ведь площадь треугольника $A_1M_1B_1$ больше площади треугольника AMB. Итак, мы доказали, что если прямая AB делит пополам периметр фигуры с наибольшей площадью, M — произвольная точка на границе, отличная от A и B, то $\angle AMB = 90°$, т.е. M лежит на окружности с диаметром AB. Таким образом, решение изопериметрической задачи дает окружность.

С изопериметрической задачи по существу начинается одно из важнейших направлений современной математики — вариационное исчисление.

На этом можно было бы и закончить заметку, но мы сделаем еще один шаг (вперед? назад?). Как мы уже отмечали, наиболее естественным казался путь от многоугольников к окружности. Однако был предложен способ решения общей задачи, совсем не опирающийся на свойства экстремальных многоугольников. Более того, наоборот, некоторые свойства этих многоугольников относительно легко получаются из этого общего результата, в то время как доказательства этих свойств, не опирающиеся на общий результат, представляются весьма затруднительными. Вот пример.

Задача 4. *Рассмотрим всевозможные n-угольники с заданными сторонами. (Можно считать, что имеется некоторый многоугольник, соседние стороны которого шарнирно соединены друг с другом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, которые получаются при деформации такого многоугольника.) Докажите, что среди таких многоугольников найдется многоугольник, около которого можно описать окружность, и именно этот многоугольник имеет наибольшую площадь среди рассматриваемых многоугольников.*

Решение. Рассмотрим достаточно большую окружность, такую, что если мы начнем от какой-то точки A этой окружности откладывать последовательно в одном направлении хорды, равные сторонам многоугольника, то сумма всех соответствующих дуг будет меньше окружности. Обозначим через B конец последней хорды. Одна из двух дуг AB не содержит построенных нами хорд (рис.6). Начнем уменьшать радиус окружности. В какой-то

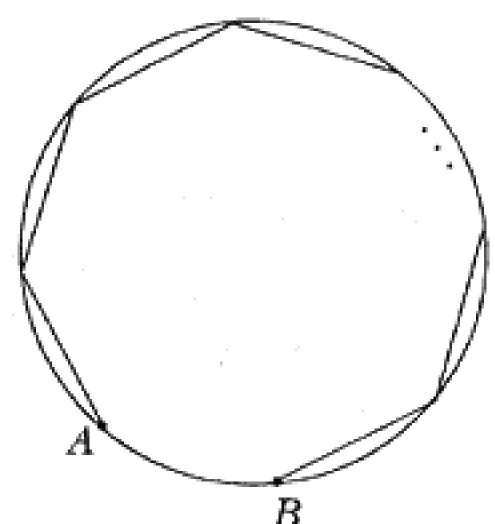

Рис. 6

момент точки A и B совпадут. При этом мы получим искомый вписанный многоугольник (рис.7,*а*). Докажем, что он имеет наибольшую площадь. Рассмотрим произвольный многоугольник с такими же сторонами. Построим на его сторонах такие же сегменты, как и на соответствующих сторонах вписанного многоугольника (рис.7,*б*). Граница этих сегментов имеет длину, равную длине описанной окружности. Значит, площадь, ограниченная дугами сегментов на рисунке 7,*б*, меньше площади круга на рисунке 7,*а*. Убирая эти сегменты, получим, что площадь вписанного многоугольника

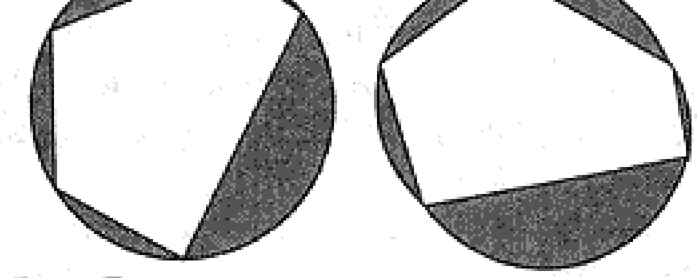

Рис. 7

(рис.7,*а*) больше площади любого другого многоугольника с такими же сторонами (рис.7,*б*).

А теперь вновь вспомним главную изопериметрическую задачу (задача 3). Сам факт существования решения задачи, факт, достаточно очевидный для неиспорченного математическими трюизмами разума, позволяет это самое решение найти. В связи с этим расскажем одну историю, относящуюся уже к современному научному фольклору.

Решение одной сложной научной проблемы было поручено группе ученых, среди которых были математик и физик. Как-то раз математик, встретив физика, радостно сообщил, что он сумел доказать теорему о существовании решения проблемы. В ответ физик заметил, что если бы он хоть на мгновение усомнился в существовании решения, то никогда бы не стал заниматься этой проблемой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Одна сторона треугольника равна a, а противоположный угол равен α. Найдите наибольшее значение площади таких треугольников.

2. Рассмотрим всевозможные треугольники единичной площади. Найдите наименьшее значение периметров таких треугольников.

3. На дуге AB некоторой окружности найдите такие точки K и M, что площадь четырехугольника $AKMB$ достигает наибольшего значения.

4. Рассмотрим фигуру с периметром l и площадью Δ. Докажите, что $l^2 > 12{,}5\Delta$.

5. Имеется набор из отрезков. Рассмотрим всевозможные многоугольники, последовательные стороны которых равны заданным отрезкам, взятым в некотором порядке. Докажите, что наибольшее значение площади таких многоугольников не зависит от того, в каком порядке взяты отрезки.

6. Рассмотрим всевозможные n-угольники, у которых заданы $n-1$ сторона. Докажите, что наибольшее значение площади таких n-угольников достигается для такого вписанного n-угольника, у которого нефиксированная сторона является диаметром описанной окружности.

7. Найдите линию наименьшей длины, делящую пополам площадь правильного треугольника со стороной 1.

ПОПРАВКА

В статье «Поступайте в ОЛ ВЗМШ» (см. «Квант» №6 за 1996 г.) в задаче 6 вступительной работы на отделение химии допущена ошибка. Масса выделившегося в результате реакции черного осадка С должна быть 12,7 г.