качестве примера возьмем притчу Л.Н.Толстого «Много ли человеку земли нужно». Не станем пересказывать ее сюжет, сформулируем лишь задачу, которую пытался решить герой притчи: обойти за день как можно больший участок земли.

Можно говорить о целом цикле математических задач, порожденных этими мифологическими и литературными историями. Вот одна из простейших.

Задача 1. *Среди треугольников, у которых задана одна из сторон и сумма двух других, найдите треугольник с наибольшей площадью.*

Решение. Пусть известная сторона равна $2a$, а сумма двух других $2b$. (Понятно, что $b > a$.) Обозначим одну из этих сторон через $b + x$, тогда вторая будет $b - x$ (рис.1). По формуле

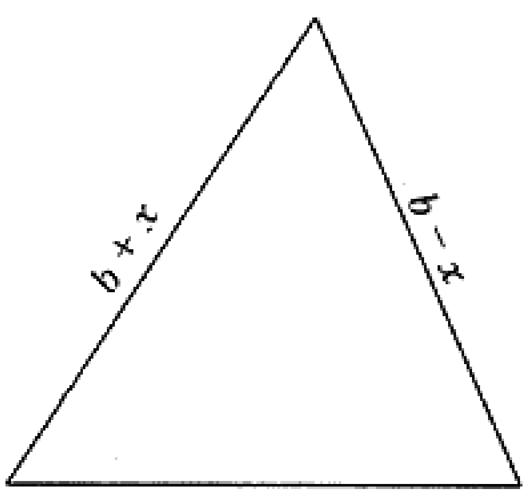

Рис. 1

Герона имеем (обозначив площадь треугольника через Δ):

$$\Delta^2 = (a+b)(b-a)(a+x)(a-x) = \left(b^2-a^2\right)\left(a^2-x^2\right).$$

Из этого равенства видно, что наибольшей площадь будет при $x = 0$, т.е. когда наш треугольник является равнобедренным.

Замечание к решению. Обратите внимание на то, что мы смогли так коротко решить задачу благодаря правильно выбранной параметризации. В частности, если задана сумма двух величин (у нас это $2b$), а нужный результат по всей видимости достигается при их равенстве, то очень часто удобно оказывается обозначить эти величины именно так: $b + x$, $b - x$.

Задача 2. *Докажите, что среди треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.*

Очень важно то, что при доказательстве мы будем использовать факт *существования* среди треугольников с заданным периметром треугольника с наибольшей площадью.

Доказательство. Рассмотрим треугольник наибольшей площади с заданным периметром. Предположим, что этот треугольник не является равносторонним. Докажем, что тогда найдется треугольник с тем же периметром и большей площадью. Т.е. рассматриваемый треугольник не может иметь наибольшую возможную площадь.

Итак, среди сторон рассматриваемого треугольника имеется хотя бы одна

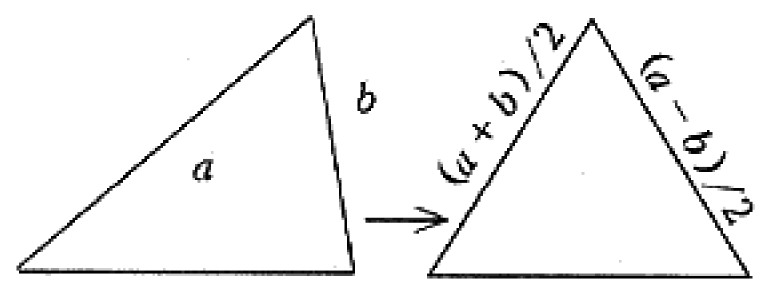

Рис. 2

пара неравных сторон (рис.2). Обозначим эти стороны через a и b, c — третья сторона ($a \neq b$). Треугольник со сторонами $(a+b)/2$, $(a-b)/2$, c, как это следует из предыдущей задачи, имеет бóльшую площадь при том же периметре. А это противоречит предположению о том, что рассматриваемый треугольник имел наибольшую площадь среди треугольников с периметром $P = a + b + c$.

Дальше можно было бы доказать, что среди всевозможных n-угольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный. Затем, увеличивая n, в пределе «добраться» до окружности. Но мы не будем идти по этому длинному пути, а перейдем сразу к основной задаче. Сначала сформулируем ее.

Задача 3. *Среди всевозможных плоских замкнутых линий заданной длины найдите ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.*

Это и есть знаменитая изопериметрическая задача (от греческих слов «ísos» — равный и «perimetréō» — измеряю вокруг). С термином «периметр» вы давно знакомы, правда, относили его в основном к многоугольникам. Но это понятие, как в нашей задаче, распространяется на произвольные фигуры. Иногда эту задачу называют также «задачей Дидоны». Происхождение этого названия теперь можно уже не объяснять.

При решении мы, как и в предыдущем случае, будем опираться на факт существования среди всевозможных фигур с заданным периметром фигуры с наибольшей площадью. Иными словами, тем, что среди замкнутых линий данной длины существует линия, ограничивающая наибольшую площадь. (А как же иначе, ведь площади всевозможных фигур с данным периметром ограничены!) Мы приведем решение, найденное Якобом Штейнером (1796—1863) — выдающимся швейцарским геометром XIX столетия. (Как видите, в прошедшем году исполнилось 200 лет со дня его рождения.)

Решение. Прежде всего заметим, что фигура наибольшей площади с заданным периметром должна быть выпуклой. (Т.е. если какие-то две точки фигуры расположены внутри нее или на границе, то и весь отрезок, соединяющий эти точки, также расположен внутри или на границе фигуры.) В противном случае мы могли бы построить

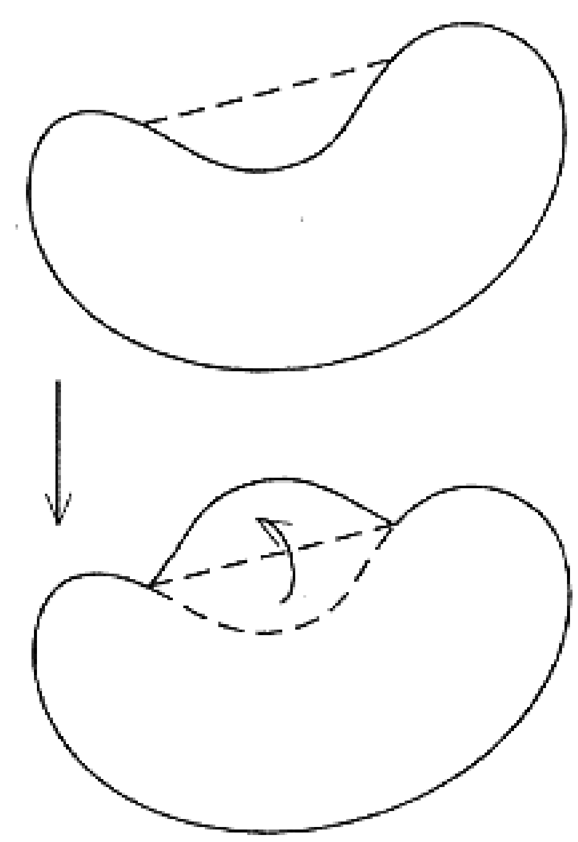

Рис. 3

линию той же длины, ограничивающую фигуру большей площади (рис.3).

Второе замечание о свойствах искомой фигуры: если прямая делит пополам периметр фигуры, то она делит

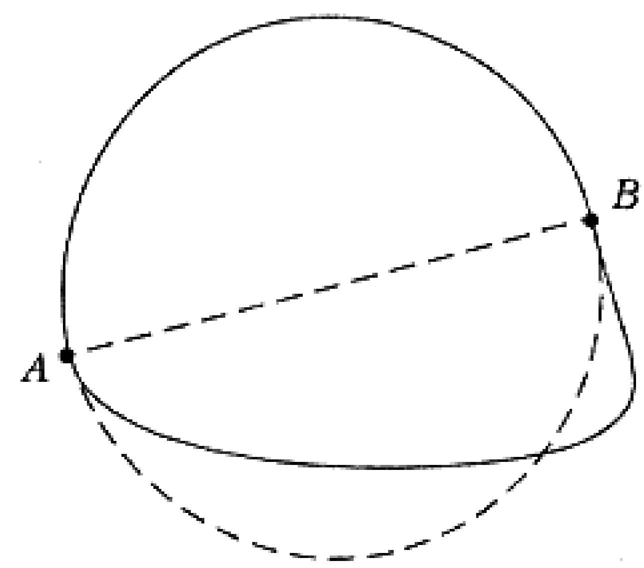

Рис. 4

пополам и площадь фигуры. В самом деле, пусть прямая AB (A и B — точки на границе, рис.4) делит пополам периметр фигуры, но при этом одна из двух частей имеет большую площадь. Заменим меньшую часть фигурой, симметричной большей относительно прямой