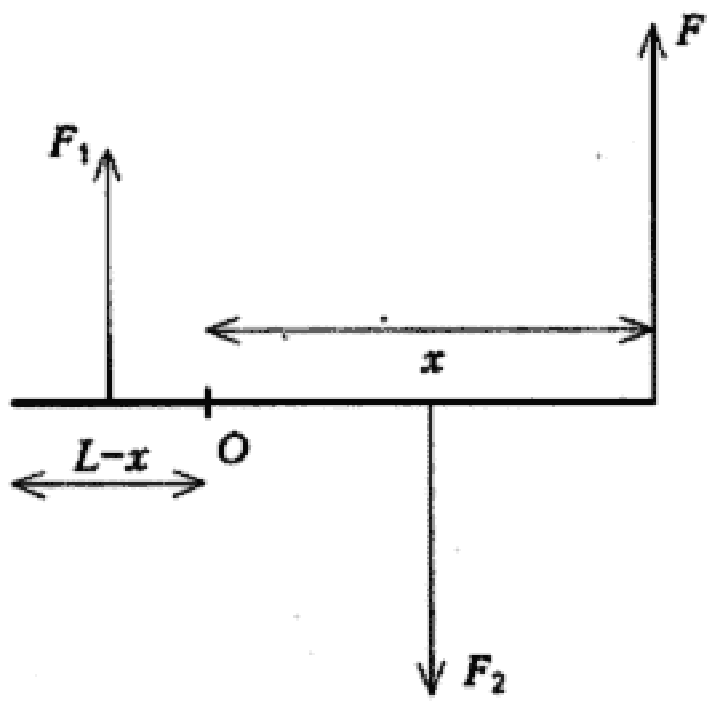
Ф1568. *Граненый карандаш массой M = 20 г лежит на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0,05$. К одному из концов прикладывают горизонтальную силу в направлении, перпендикулярном карандашу, и увеличивают эту силу, пока карандаш не начинает проскальзывать. При каком значении силы это произойдет? Какая из точек карандаша при этом не проскальзывает?*

Обозначим через O (см. рисунок) точку карандаша, которая не проскальзывает, а через F_1 и F_2 — силы



трения, действующие на каждую из частей карандаша, которые проскальзывают по-разному. Силы пропорциональны длинам соответствующих частей карандаша (ведь поверхность стола «не очень жесткая») и приложены в серединах этих частей, а направления сил противоположны друг другу. Для минимального значения силы F (при минимальном значении силы как бы еще сохраняется равновесие, но силы трения уже максимальны, еще немного — и все поедет) можно записать два уравнения равновесия — сил и моментов (моменты запишем относительно искомой непроскальзывающей точки):

$$F + F_1 - F_2 = 0,\ Fx = \frac{F_1(L-x)}{2} + \frac{F_2 x}{2},$$

где

$$F_1 = \frac{\mu Mg(L-x)}{L},\ F_2 = \frac{\mu Mgx}{L}.$$

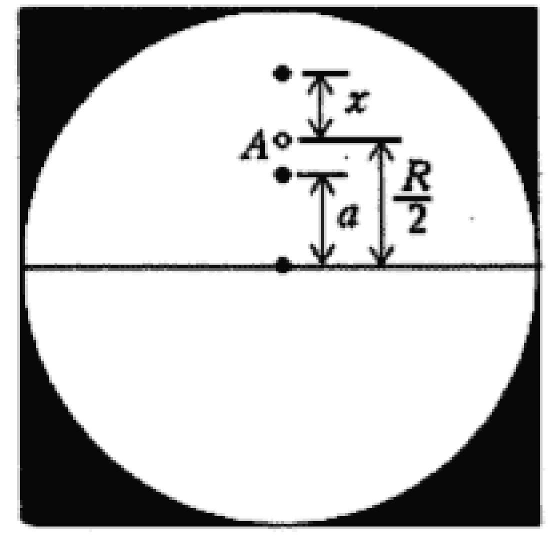
Решая уравнения, получим

$$x = \frac{L}{\sqrt{2}},\ F = \mu Mg\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}004\ \text{Н}.$$

М.Ермилов

Ф1569. *Из однородного квадратного листа со стороной d вырезали круг максимального диаметра, при этом остались четыре «уголка». Где находится центр масс одного такого уголка? Центр масс полукруга радиусом R находится на расстоянии $a = 4R/(3\pi)$ от своего диаметра.*

Центр тяжести A половинки всего квадрата находится на расстоянии $R/2$ от диаметра круга (см. рисунок). Обозначим через x расстояние по вертикали от центра тяжести «уголка» до точки A. Отношение масс частей фигуры равно отношению их площадей. Тогда из пра-



вила моментов сил (для четвертинки) получаем

$$\left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)x = \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{R}{2} - a\right),$$

откуда

$$x = \frac{\pi(R/2 - a)}{4-\pi} = \frac{R(\pi - 8/3)}{2(4-\pi)} = 0{,}277R.$$

Расстояние от центра тяжести уголка до вершины соответствующего прямого угла составляет примерно $0{,}316R$.

З.Рафаилов

Ф1570. *На неподвижное тонкое кольцо надета небольшая бусинка. Коэффициент трения между бусинкой и кольцом $\mu = 0,1$, сила тяжести отсутствует. Во сколько раз уменьшится из-за трения скорость движения бусинки за $n = 3$ оборота? Если у вас не получится точное решение, постарайтесь посчитать приближенно.*

Сила трения, которая тормозит бусинку, определяется силой нормальной реакции. В нашем случае эта сила равна силе, действующей на бусинку со стороны кольца и направленной к центру, т.е.

$$N = \frac{mv^2}{R},\ F_{\text{тр}} = \mu N = \frac{\mu m v^2}{R}.$$

За малый отрезок времени Δt скорость бусинки уменьшится на

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{F_{\text{тр}}}{m}\Delta t = \frac{\mu v^2 \Delta t}{R} = \frac{\mu v \Delta s}{R}.$$

Видно, что на заданном маленьком участке пути скорость уменьшается на определенную долю. Например, если на перемещении 1 см скорость уменьшается до 0,99 своего значения в начале этого сантиметра, то за 5 см она составит $(0{,}99)^5$ от этого значения. Воспользуемся этим для вычисления окончательной скорости — найдем такой кусочек Δs_0, на котором скорость уменьшается, скажем, до $1 - 0{,}001 = 0{,}999$ своего значения:

$$\Delta s_0 = \frac{0{,}001R}{\mu}.$$

На всем пути $s = 2\pi Rn$ таких кусочков получится $N = s/\Delta s_0 = 1000n \cdot 2\pi\mu$, тогда скорость бусинки в конце составит

$$v = v_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^N = v_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000N/1000}$$

Простое преобразование показателя степени позволяет увидеть (если кто еще не догадался!) в этом выраже-