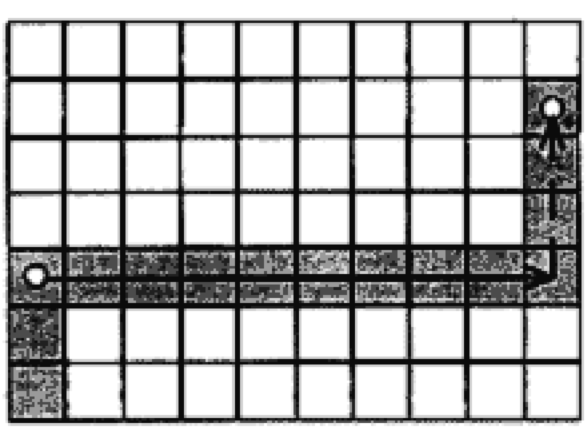
отрезок AB. Заметим, что l проходит через точки A или B, когда один из углов AMO или BMO — прямой. А пересекать AB прямая l будет в том и только в том случае, если ровно один из углов AMO и BMO — тупой. Поэтому искомое множество состоит из точек, лежащих внутри ровно одного из кругов с диаметрами OA и OB (см. рисунок).

И.Шарыгин

М1558. *Игра происходит на квадратной шахматной доске $n \times n$. Двое поочередно передвигают по доске ладью, причем не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Вначале ладья стоит в углу доски. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Для кого существует способ выиграть: для начинающего игру или для того, кто ходит вторым?*

Выигрывает первый. Выигрывающие ходы состоят в следующем: он должен идти параллельно стороне до конца по тому направлению, где больше клеток.
Эта стратегия годится для доски любого размера $m \times n$ клеток ($m \geq 1$, $n > 1$), если ладья стоит на любом поле, граничащем с меньшей (не большей) стороной. Если ширина доски равна 1, тогда игра на этом кончается и выиграл первый. В противном случае в результате хода первого игрока и любого ответа второго мы имеем ту же ситуацию (см. рисунок), что вначале, но ширина



доски становится меньше. Через конечное число ходов игра заканчивается победой первого.

Б.Бегун

М1559. *Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?*

Рассмотрим куб, вершины которого имеют декартовы координаты (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), ..., (1,1,1) — всего восемь троек. Если каждую такую тройку записать подряд, выбросив из записи запятые, и прочитать эти тройки как двоичные числа, то получится ряд чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; при этом тройке (x, y, z) нулей и единиц соответствует число $4x + 2y + z$, т.е. скалярное произведение вектора $\vec{v} = (4,2,1)$ на вектор (x,y,z).
Проведем через начало координат плоскость p, перпендикулярную вектору $\vec{v}$. Вспомнив, что скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию на него другого вектора, видим, что проекции вершин куба на прямую, содержащую вектор $\vec{v}$, находятся от начала координат (а значит, вершины куба — от плоскости p) на расстояниях, пропорциональных числам 0, 1, 2, ..., 7.
Чтобы получить искомый куб, нужно наш куб подвергнуть гомотетии с центром в начале координат с коэффициентом, который легко вычисляется (он равен $\sqrt{21} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1}$).

В.Произволов

М1560. *В некотором государстве человек может быть зачислен в гвардию только в том случае, если он выше ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в гвардию, человек сам называет число R (радиус), после чего его «соседями» считаются все, кто живет на расстоянии меньше R от него. В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Определение «соседей» аналогично: человек сам называет число r (радиус) и т.д., причем R и r не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в гвардию и одновременно не менее 90% населения освобождены от армии? (Значения R и r должны выбираться так, чтобы «множества соседей» были непустыми.)*

Ответ: может. Приведем условный пример такого государства. Рассмотрим точки числовой прямой: x, $x + d$, $x + d/3$, $x + d/9$, ..., $x + d/3^9$ ($d > 0$). В эти точки поместим 10 человек. Пусть их рост (в той же последовательности) выражается числами a, $a - h$, $a - 2h$, ..., $a - 9h$, где a, h — произвольные положительные числа с естественным ограничением, что $a - 9h > 0$. Пусть значения R, которые они называют (в том же порядке), $- d$, $d/3$, $d/9$, ..., $d/3^8$, $d/3^8$. Тогда 9 из них (все, кроме последнего) будут выше всех своих соседей. Конфигурацию из таких точек с какими-то значениями x, d, R, a и h назовем *базовой конфигурацией*.
Теперь определим 100 базовых конфигураций B_0, B_1, ..., B_{99} со следующими параметрами. Пусть у всех B_i $(0 \leq i \leq 99)$ будет одинаковое $d = 1$ и одинаковое $h = 1/10$; последовательные значения x для этих конфигураций пусть будут $D/3^i$, где $D = 3^{99}$, а параметра a — $A + i$, где A — достаточно большое число, скажем, 100. Пусть в этом государстве больше нет жителей. Тем самым их всего 1000.
При таком расположении базовых конфигураций они не будут мешать друг другу, т.е. у каждого человека «соседями» для гвардии будут те же люди, которые получались, когда эту базовую конфигурацию рассматривали отдельно. Таким образом, в гвардию годятся все, кроме последних людей в базовых конфигурациях, а таких всего 100 человек из 1000. Одно из условий задачи выполнено.
В качестве r (радиус для освобождения от армии) пусть каждый назовет число $D/3^i$, где i — номер его базовой конфигурации. Тогда число людей среди его «соседей» (определенных через этот радиус), которые ниже него, не больше 9 — это те, кто находится с ним в одной базовой конфигурации. Число же людей, которые выше него — это все люди из базовых конфигураций с большими, чем у него, номерами. Пусть $i < 96$. Тогда это число не меньше 50, что составляет больше 80% всех «соседей». Таких людей 950, т.е. больше 90% всех жителей.

Н.Константинов