вимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, а $n-1$ и $n+1$ — нет; б) каждое из этих трех чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

а) Изучим, какие остатки от деления на 16 может давать сумма двух квадратов. Нетрудно найти остаток q при делении на 16 квадрата некоторого числа в зависимости от того, какой остаток r имеет это число при делении на 8; если $r = 0, 1, 2, \ldots, 7$, то $q = 0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1$.

Итак, квадрат может давать при делении на 16 лишь четыре остатка: 0, 1, 4, 9. Попарные суммы этих четырех чисел могут принимать лишь следующие значения: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13. В этом списке отсутствуют оба соседа числа 13. Этим можно воспользоваться для получения одной серии ответов задачи. Нужно взять в качестве n число $(8a+5)^2+(8b+6)^2$ при каких-нибудь натуральных a и b (таких чисел бесконечно много). Тогда $n-1$ и $n+1$ заведомо не являются суммами двух квадратов натуральных чисел.

В дальнейшем мы будем говорить коротко: число *представимо*, если оно является суммой квадратов двух натуральных чисел.

Вот еще одно решение, использующее более простые факты, чем первое: число вида $4t+3$ не представимо, и число, делящееся на 3, но не делящееся на 9, также не представимо. Число $2\cdot 100^m = (10^m)^2 + (10^m)^2$ представимо, а числа $2\cdot 100^m - 1$ и $2\cdot 100^m + 1$ — нет (сумма цифр последнего числа, а значит и остаток его при делении на 9, равны 3).

Наконец, отметим еще одно решение, предложенное школьниками на олимпиаде. Для нечетного k рассмотрим число $n = k^2+1$. Тогда число $n+1$ имеет вид $4t+3$. Осталось указать бесконечную серию значений k, при каждом из которых $n-1=k^2$ не представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Достаточно положить $k=3^l$. Действительно, если $9^l = a^2+b^2$, то, как легко видеть, оба числа a и b должны делиться на 3. Разделив все члены последнего равенства на максимально возможную степень 3, придем к противоречию.

б) Найдем сначала хотя бы одну тройку $n-1$, n, $n+1$, в которой все числа представимы. Заметим, что первое число $n-1$ должно делиться на 4 и если какое-то число делится на 3, то оно должно делиться и на 9. Пользуясь этим, легко найти наименьшую такую тройку: $72 = 6^2+6^2$, $73 = 3^2+8^2$, $74 = 5^2+7^2$.

Укажем некоторую бесконечную серию таких троек. В этой серии первый элемент тройки $n-1 = 2k^2 = k^2+k^2$. Тогда число $n+1$ тоже автоматически представимо: $n+1 = 2k^2+2 = (k+1)^2+(k-1)^2$.

Попробуем найти k так, чтобы число $2k^2+1$ также было представимо в виде суммы двух квадратов, а именно

$$2k^2+1 = (k-x)^2 + (k+x-1)^2. \qquad (*)$$

Для этого нужно, чтобы было $2x^2-2k-2x=0$. Отсюда $k = x^2 - x$. Итак, взяв бесконечную серию значений $x = 3, 4, \ldots$, находим тройки соседних натуральных чисел, каждое из которых представимо: это числа $n-1$, n и $n+1$, где $n = 2k^2+1$.

(Кстати, похожее решение уже публиковалось в «Кванте» — см. М814.)

Следующее, второе решение позволяет добиться того, чтобы все квадраты в представлениях были различны. Будем искать решения такой системы уравнений в натуральных числах:

$$m^2+k^2 = (m-1)^2+a^2-1 = (m+1)^2+b^2-2,\ m>1.$$

Перепишем систему эквивалентным образом:

$$2m = a^2-k^2 = k^2-b^2+1. \qquad (**)$$

Мы приходим к равенству $2k^2+1 = a^2+b^2$, для которого выше уже научились находить решения (см. $(*)$). Поскольку число $(**)$ должно быть четным, получаем, что набор значений

$$k = x^2-x,\ a = k+x-1,\ b = k-x,\ m = (a-k)(a+k)/2$$

годится при любом нечетном x. При $x=3$ получаем тройку 14^2+6^2, 13^2+8^2, 15^2+3^2.

Еще один замечательный способ получать серию примеров вытекает из такого утверждения: если числа $n-1$, n и $n+1$ представимы, то и числа $(n-1)^2$, n^2 и $(n+1)^2$ тоже представимы. Это можно доказать, опираясь на следующий факт: произведение двух представимых чисел само представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел. Этот факт, наряду с другими глубокими теоремами о суммах двух квадратов, мы предполагаем обсудить в одном из ближайших номеров «Кванта».

Замечания. 1. Среди наших примеров представимых троек $n-1$, n и $n+1$ легко найти бесконечные серии таких, что ни одно из чисел тройки — не квадрат.

2. Можно (разными способами) доказать, что существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, состоящие из непредставимых чисел.

3. Можно также найти бесконечно много значений n, для которых пара чисел n, $n+1$ представима, а соседние с ними числа — нет. Простой пример: $n = 100^k$.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1557. *А и В — две данные точки окружности. Найдите геометрическое место середин хорд этой окружности, пересекающих отрезок АВ.*

Пусть O — центр круга, A и B — данные точки. Задачу можно переформулировать так: найти множество точек M таких, что прямая l, перпендикулярная к отрезку OM, проведенная через точку M, пересекает