Для завершения решения достаточно воспользоваться равенством

$$(1+x)P_{2m+1}(x^2)=P_{4m+2}(x).$$

Замечания. 1. Основную лемму легко доказать также и с помощью комплексных чисел: очевидно, что корни многочленов $P_a(x)$ и $P_b(x)$ обращают в нуль и многочлен $P_{ab}(x)$, а при взаимно простых a и b многочлены $P_a(x)$ и $P_b(x)$ не имеют общих корней. (Вот эквивалентное геометрическое утверждение: при взаимно простых a и b у правильных a-угольника и b-угольника, вписанных в окружность, не может быть более одной общей вершины.)

2. Доказанное утверждение задачи нетрудно обобщить следующим образом.

Предложение. Для любого конечного набора T целых чисел существует такое натуральное число n, что многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=Q(x)R(x),$$

где $Q(x)=1+\ldots$ — многочлен с целыми коэффициентами, среди которых встречаются все числа из T.

В.Сендеров

M1553. *Из множества чисел 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/100 составляются всевозможные подмножества, содержащие четное количество чисел (два, четыре, ..., 100 чисел), и для каждого подмножества вычисляется произведение входящих в него чисел. Найдите сумму таких произведений.*

Обозначим сумму произведений чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, взятых в четном количестве (по 2, по 4, ..., по 98), через G, в нечетном (по одному, по 3, ..., по 97 и, наконец, всех 99) — через H. Тогда

$$G+H=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)-1=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}-1=\frac{101}{2}-1=\frac{99}{2},$$

$$G-H=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}-1=\frac{1}{100}-1=-\frac{99}{100},$$

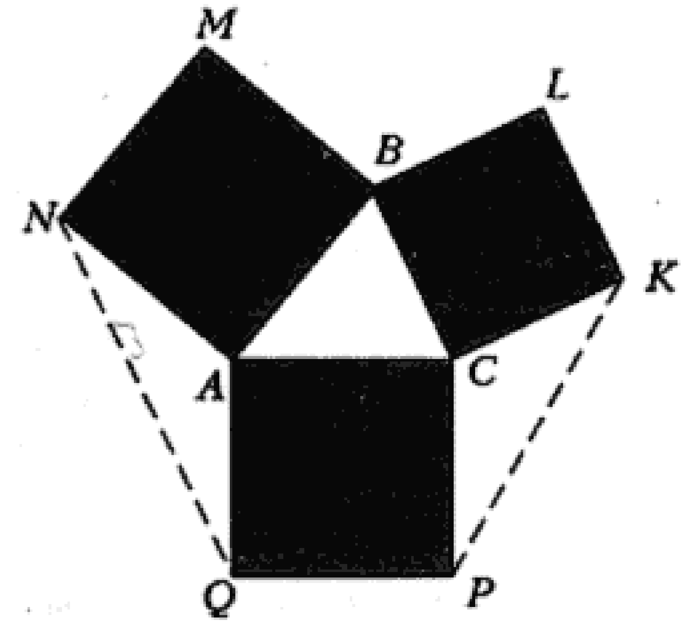
откуда

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{99}{2}-\frac{99}{100}\right)=\frac{99\cdot 49}{200},$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{99}{2}+\frac{99}{100}\right)=\frac{99\cdot 51}{200}.$$

Н.Васильев

M1554. *На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMN, BCKL, ACPQ. На отрезках NQ и PK построены квадраты NQZT и PKXY. Найдите разность площадей квадратов NQZT и PKXY, если известна разность площадей квадратов ABMN и BCKL.*



Ответ: $3d$ (где d — заданная разность площадей).

По теореме косинусов (см. рисунок),

$$NQ^2=AN^2+AQ^2-2AN\cdot AQ\cdot\cos\angle NAQ=$$

$$=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle NAQ,$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC.$$

Поскольку $\angle NAC+\angle BAC=180°$, сумма их косинусов равна 0. Поэтому

$$NQ^2+BC^2=2AB^2+2AC^2.$$

Аналогично, $PK^2+AB^2=2BC^2+2AC^2$. Поэтому

$$NQ^2-PK^2=3AB^2-3BC^2=3d.$$

А.Герко, М.Вялый

M1555. *Даны два непересекающихся круга и точка P такая, что четыре касательные PA, PB, PC, PD, проведенные из нее к двум кругам, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных этих кругов.*

Точка X пересечения общих внутренних касательных окружностей с радиусами r_1 и r_2 и центрами O_1 и O_2 делит отрезок O_1O_2 в отношении $XO_1/XO_2=r_1/r_2$. Докажем, что в том же отношении делит этот отрезок и точка Y пересечения с ним диагонали. Поскольку точки A, B, C, D лежат на одной окружности (с центром P), $\sin\angle O_1AY=\sin\angle O_2CY$ и по теореме синусов получаем

$$\frac{YO_1}{r_1}=\frac{\sin\angle O_1AY}{\sin\angle O_1YA}=\frac{\sin\angle O_2CY}{\sin\angle O_2YC}=\frac{YO_2}{r_2},$$

откуда $YO_1/YO_2=r_1/r_2$. Поэтому Y (и, аналогично, точка пересечения BD с O_1O_2) совпадает с X.

На самом деле эта задача — переформулировка теоремы о том, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного четырехугольника (со вписанной окружностью) проходят через точку пересечения его диагоналей: A, B, C, D играют роль точек касания, P — центра окружности, O_1 и O_2 — двух вершин описанного четырехугольника. Этот факт был использован недавно И.З.Вайнштейном в замечательном решении задачи M1524.

Н.Васильев, С.Маркелов

M1556. *Докажите, что существует бесконечно много троек чисел n − 1, n, n + 1 таких, что а) n предста-*