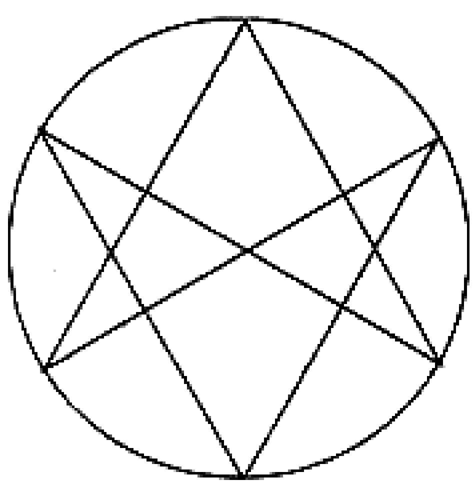
внутренний диаметр трубы, чтобы шарик поглощал ровно половину испускаемой источником энергии?

З.Рафаилов

Решения задач М1551 — М1560, Ф1568 — Ф1577

М1551. *Вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь такая ломаная?*

На рисунке изображена шестизвенная ломаная с семью точками самопересечения.



Докажем, что такая ломаная не может иметь больше семи самопересечений. Пусть общее число самопересечений равно N. Для каждого звена рассмотрим число точек самопересечения, которые лежат на этом звене, и обозначим через S сумму этих чисел. Тогда $S \ge 2N$ (если в одной точке самопересечения пересекаются два звена, то эта точка входит в сумму дважды, если три или больше, то — больше двух раз).

На любом звене может лежать не больше трех точек самопересечения, так как, кроме этого звена и двух соседних с ним, имеется всего три звена, которые могут с ним пересекаться. При этом три точки могут быть только на таком «диагональном» звене, что из четырех вершин, не являющихся его концами, две лежат в одной полуплоскости от него, а две другие — в другой. (Если по какую-то сторону от звена лежит лишь одна вершина, то нельзя провести больше двух отрезков к вершинам, лежащим по другую сторону звена.) Таких «диагональных» звеньев максимум три. На каждом из остальных лежит не больше чем по две точки самопересечения, поэтому $S \le 3\times2 + 3\times3 = 15$, т.е. $N \le S/2$ не превосходит 7.

Можно примерно так же доказать, что и у любой шестизвенной ломаной (не обязательно с вершинами на окружности) не больше 7 точек самопересечения (на двух соседних звеньях не может быть по три точки самопересечения).

Было бы интересно получить точную оценку и для любой n-звенной ломаной.

Н.Васильев

М1552. *Обозначим через $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ многочлен $(n-1)$-й степени, все коэффициенты которого равны единице. а) Докажите, что для любого натурального числа s существует такое число k, что многочлен $P_k(x)$ можно разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами, один из которых имеет вид $1 + sx + \ldots$ (многоточие заменяет члены степени выше первой). б) Докажите, что такое число k найдется и для любого целого числа s.*

Поясним идею решения одним примером. Поскольку $x^{30} - 1$ делится на $x^2 - 1$, на $x^3 - 1$ и на $x^5 - 1$, то $1 + x + \ldots + x^{29}$ делится на

$$(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1 + 3x + \ldots + x^7.$$

Ниже мы будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами; формулировка «многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$» будет означать следующее: существует многочлен $R(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(x) = Q(x)R(x)$.[1] Всюду ниже $P_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$.

Основная лемма. *Если натуральные числа a и b взаимно просты, то многочлен $P_{ab}(x)$ делится на произведение многочленов $P_a(x)P_b(x)$.*

Доказательство. Так как $P_{ab}(x) = P_a(x)P_b(x^a)$, то достаточно доказать, что многочлен $P_b(x^a)$ делится на $P_b(x)$, т.е. что многочлен

$$(1-x)P_b(x^a) = 1 - x + x^a - x^{a+1} + x^{2a} - x^{2a+1} + \ldots + x^{(b-1)a} - x^{(b-1)a+1} \qquad (*)$$

делится на $(1-x)P_b(x) = 1 - x^b$.

Но при делении на b чисел 1, $a+1$, $2a+1$, …, $(b-1)a+1$ (так же как чисел 0, a, $2a$, …, $(b-1)a$) встречаются по одному разу все остатки $0, 1, 2, \ldots, b-1$ (поскольку a и b взаимно просты). Поэтому многочлен $(*)$ можно представить в виде суммы b двучленов $x^{kb+r} - x^{mb+r}$ (где k, m — целые, зависящие от r; $r = 0, 1, 2, \ldots, b-1$), а каждый такой двучлен делится на $1 - x^b$.

Приступим теперь к решению задачи.

а) Рассмотрим многочлен $P_{a_1 \ldots a_s}(x)$, где $a_1, \ldots, a_s$ — попарно взаимно простые числа, большие единицы. Из леммы по индукции следует, что он раскладывается в произведение

$$P_{a_1 \ldots a_s}(x) = P_{a_1}(x) \ldots P_{a_s}(x) R(x),$$

но, очевидно,

$$P_{a_1}(x) \ldots P_{a_s}(x) = 1 + sx + \ldots$$

(здесь многоточие заменяет члены, степени которых выше первой).

б) При $s = 0$ утверждение очевидно: $P_4(x) = (1+x)(1+x^2)$. (Так как $P_{2c+2}(x) = (1+x)P_{c+1}(x^2)$ при $c \ge 0$, то примером может служить также и любой многочлен $P_{2c+2}(x)$, где $c \ge 1$.)

Пусть теперь $s < 0$. В утверждении леммы положим $a = 2$, $b = 2m+1$, где $m \ge 0$. Из доказательства леммы следует, что $P_{2m+1}(x^2)$ делится на $P_{2m+1}(x)$, а значит, и на $P_{2m+1}(-x)$. Рассмотрим построенный при решении пункта а) многочлен $P_{a_1 \ldots a_{-s}}(x)$. Из решения пункта а) следует, что $P_{a_1 \ldots a_{-s}}(-x)$ делится на $1 + sx + \ldots$ (здесь, как и выше, многоточием заменены члены, степени которых выше первой).

Выберем теперь в качестве $a_1, \ldots, a_{-s}$ нечетные числа (большие единицы) и положим $2m = a_1 \ldots a_{-s} - 1$. Получим: $P_{2m+1}(x^2)$ делится на $1 + sx + \ldots$

[1] *Впрочем, если многочлен с целыми коэффициентами делится на многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент либо свободный член равен единице, то и частное — тоже многочлен с целыми коэффициентами.*