Задачи по математике и физике

В этом номере мы возобновляем ежегодный конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса будут награждены призами журнала «Квант» и получат рекомендации для участия в региональных физических и математических олимпиадах.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1— 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1576» или «Ф1583». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1576, М1578, М1579—М1581, М1585 предлагались на осеннем туре Турнира городов, а задача М1584 — на заочном туре Соросовской олимпиады по математике.

Задачи М1576 — М1585, Ф1583 —Ф1592

М1576. а) Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре черных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?
б) Можно ли 8 вершин куба разбить на две четверки так, чтобы в каждой плоскости, проходящей через любые три точки одной четверки, находилась точка из другой четверки?

Н.Васильев, И.Шарыгин

М1577. В треугольнике отношение синуса одного угла к косинусу другого равно тангенсу третьего. Докажите, что высота, проведенная из вершины первого угла, медиана, проведенная из вершины второго, и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.

Л.Альтшулер

М1578*. Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y = f(x)$, определенной при всех x, для которой

$$f(f(x)) = x^2 - 1997.$$

С.Богатый, М.Смуров

М1579. Пусть A', B', C', D', E', F' — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Известны площади треугольников $ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

Н.Васильев

М1580. Можно ли несколькими отрезками и дугами разрезать круг на части так, чтобы сложить из этих частей равновеликий квадрат?

А.Канель

М1581. а) Существует ли шестизначное число A такое, что среди чисел $A, 2A, 3A, \ldots, 500\,000A$ ни одно не оканчивается шестью одинаковыми цифрами?
б)* Для каждого целого $k > 1$ найдите наименьшее натуральное $N = N(k)$ такое, что при любом натуральном A хотя бы одно из чисел $A, 2A, 3A, \ldots, NA$ оканчивается k одинаковыми цифрами.

С.Токарев

М1582. Все точки плоскости Oxy с целыми координатами (x, y) раскрашены в два цвета — синий и красный. Докажите, что найдется бесконечное одноцветное (синее или красное) множество, симметричное относительно некоторой точки.

В.Протасов

М1583. Докажите, что а) медиана произвольного тетраэдра (отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани) меньше среднего арифметического длин ребер, выходящих из той же вершины; б) биссектриса тетраэдра (отрезок, идущий от вершины до противоположной грани и одинаково наклоненный к граням, содержащим эту вершину) меньше полусуммы длин ребер, выходящих из той же вершины. в) Верно ли для биссектрисы неравенство из пункта а)?

В.Сендеров