и из этих двух формул читатель легко получит (4), используя то, что $(k-nx)^2 = k^2 - 2knx + n^2x^2$.

На самом деле мы по ходу дела вывели замечательный результат теории вероятностей — так называемый закон больших чисел Бернулли. Предоставим снова слово Бернштейну: «Рассмотрим событие A, вероятность которого равна x. Предположим, что произведено n испытаний, и мы условились платить некоторому игроку сумму $F\left(\frac{m}{n}\right)$, если событие A произойдет m раз. В этом случае математическое ожидание выигрыша (т.е. «средний выигрыш») будет иметь значение E_n». В силу теоремы Бернулли (а мы ее доказали),

$$\left|\sum_{\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} - F(x)\right| \le \frac{2C}{4n\delta},$$

откуда Бернштейн и вывел свою теорему.

В том же 1912 году Бернштейн доказал одно замечательное неравенство.

Пусть

$$p(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Такая функция называется тригонометрическим многочленом степени n. Пусть также $M = \max|p(x)|$, а $M' = \max|p'(x)|$. Тогда $M \le nM'$.

Иначе говоря, максимум модуля производной тригонометрического многочлена степени n не больше чем в n раз превосходит максимум самого многочлена.

Простейший пример тригонометрического многочлена степени n

$$q(x) = a\cos nx + b\sin nx =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(nx+\varphi)$$

показывает, что оценка эта достигается, так как в этом случае

$$M = \max|q(x)| = \sqrt{a^2+b^2},$$

а

$$M' = \max|q'(x)| =$$
$$= \max\left|n\sqrt{a^2+b^2}\sin(nx+\varphi)\right| =$$
$$= n\sqrt{a^2+b^2},$$

т.е. $M' \le nM$.

В дальнейшем все функции будут рассматриваться на отрезке $[-\pi;\pi]$, что естественно ввиду периодичности тригонометрических многочленов с периодом 2π.

Этот результат снова вызвал оживленную дискуссию, появилось множество его доказательств и истолкований. Здесь я приведу доказательство, принадлежащее знаменитому бельгийскому математику Валле Пуссену (1866 – 1962).

В доказательстве мы используем четыре элементарных факта математического анализа. Эти факты наглядно очевидны, да и доказываются достаточно просто при более подробном знакомстве с действительными числами. Мы их иллюстрируем рисунками.

1) Если на отрезке непрерывная функция принимает в двух точках значения разных знаков, то между этими точками она имеет нуль (теорема Коши) (рис. 2).

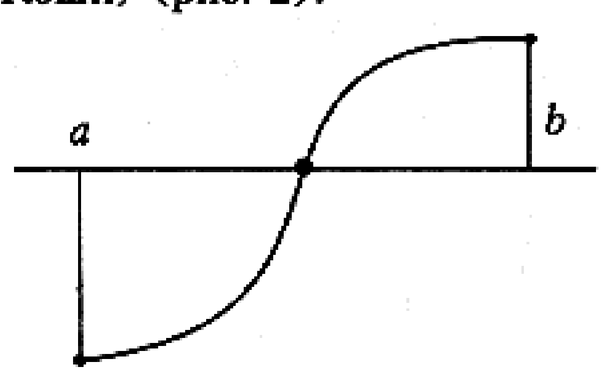

Рис. 2

2) Если дифференцируемая функция принимает в двух точках нулевое значение, то между ними есть точка, где производная функции равна нулю (теорема Ролля) (рис. 3).

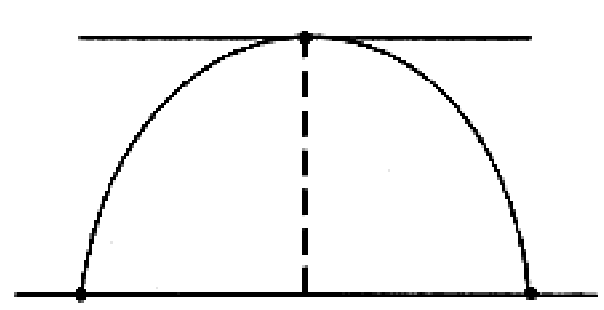

Рис. 3 a b

3) Если дифференцируемая функция достигает максимума в некоторой точке, то в этой точке производная равна нулю (теорема Ферма) (см. рис. 3).

4) Тригонометрический полином степени n не может иметь больше $2n$ нулей на промежутке $[0;2\pi)$.

Итак, приступим к доказательству неравенства Бернштейна. Достаточно доказать (убедитесь в этом), что если $M \le 1$, то $M' \le n$.

Пусть существует тригонометрический многочлен $\bar{p}(x)$ степени n такой, что в любой точке x справедлива оценка $|\bar{p}(x)| \le 1$, в то время как в некоторой точке $\bar{x}$ его производная принимает максимальное значение, равное M' и превосходящее n. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{x} = 0$ (иначе мы рассмотрели бы многочлен $\tilde{p} = \bar{p}(\bar{x} - x)$, для которого максимум модуля производной достигается при $x = 0$, а значения M и M' — те же самые).

Рассмотрим многочлен

$$q(x) = \bar{p}(x) - \left(\frac{M'}{n}\right)\sin nx.$$

Функция $\left(\frac{M'}{n}\right)\sin nx$ колеблется $2n$ раз между значениями M'/n и $-M'/n$ и при этом M'/n больше единицы. Полином же $\bar{p}(x)$ в каждой точке x по модулю не превосходит единицы.

Поэтому в точках $x_k = x_0 + \frac{\pi k}{n}$, где $x_0 = \frac{\pi}{2n}$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$, многочлен $q(x)$ принимает попеременно положительные и отрицательные значения, так что график функции q имеет вид, показанный на рисунке 4, и, в силу утверждения 1, уравнение $q(x) = 0$

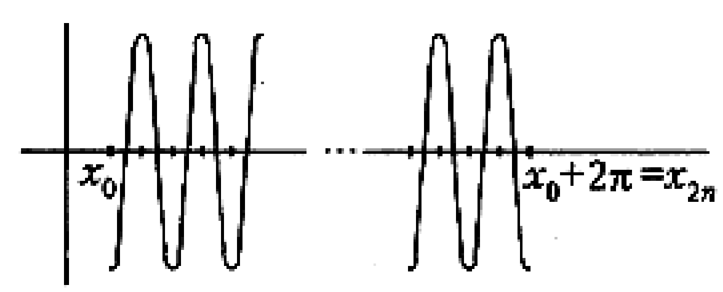

Рис. 4

имеет не меньше $2n$ корней на интервале $(x_0; x_0+2\pi)$, а следовательно, и на интервале $(0;2\pi)$. По утверждению 2, многочлен $q'(x)$ имеет не менее $2n-1$ нулей на $(0;2\pi)$. Кроме того,

$$q'(0) = \bar{p}'(0) - \frac{M'}{n}\cdot n = M' - M' = 0,$$

и следовательно, на полуинтервале $[0;2\pi)$ фунция $q'(x)$ имеет $2n$ нулей, а на отрезке $[0;2\pi]$ — $2n + 1$ нуль(поскольку $q'(2\pi) = q'(0) = 0$). Возьмем производную еще раз. Многочлен $q''(x)$ также имеет степень n, обращается в нуль в $2n$ точках интервала $(0;2\pi)$ и, кроме того $q''(0) = 0$, так как

$$q''(x) = \bar{p}''(x) + M'\sin nx$$

и $\bar{p}'(x)$ достигает в нуле своего максимума, т.е. $\bar{p}''(0) = 0$.

Значит, $q''(x)$ имеет больше $2n$ нулей на полуинтервале $[0;2\pi)$. Но, в силу утверждения 4, это невозможно! Получилось противоречие, и тем самым теорема доказана.