$-P_n^*(f,x)$ похож на синусоиду, в $n+2$ точках отрезка он принимает с последовательно противоположными знаками значения $\pm E_n(f)$.

С другой стороны, лет 30 спустя, совершенно иные соображения, а именно, исследования по теории аналитических функций, привели Вейерштрасса к следующей фундаментальной теореме: всякая непрерывная на отрезке функция f есть предел некоторой последовательности многочленов $\{P_n(f)\}$, подобно тому, как любое вещественное число есть предел последовательности рациональных чисел. Из определений ясно, что при любом натуральном n

$$E_n(f)=\left\|P_n^*(f)-f\right\|\le\left|P_n(f)-f\right|$$

и значит, для любой непрерывной функции

$$\lim_{n\to+\infty} E_n(f)=0. \qquad (2)$$

Легко проверяется, что условие (2) также и достаточно, чтобы функция была непрерывной. Но это решительно все, что можно сказать без дальнейшей настойчивой и упорной работы. Естественный вопрос: от каких свойств функции f зависит скорость убывания $E_n(f)$? Начать надо было с простых случаев. Выбор удачно пал на функции $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1,1]$; ее график — двухзвенная ломаная, она имеет производную всюду, за исключением точки $x=0$. Кроме того, функция $|x|$ играла решающую роль в одном из доказательств фундаментальной теоремы Вейерштрасса, указанном Лебегом, который заметил, что любая непрерывная n-звенная ломаная может быть записана в виде

$$\Lambda_n(x)=kx+b+\sum_{k=1}^{n}A_k\left|x-\alpha_k\right|,$$

где α_k — абсциссы вершин ломаной. Его доказательство оказалось весьма плодотворным, оно содержало скрытые возможности, которые повлекли за собой широкие обобщения, в то время Лебег их предвидеть не мог. Лебег лишь на несколько лет старше С.Н.Бернштейна, он был его товарищем, а не учителем. Сергей Натанович упоминал о нем с большой теплотой.

В техническом отношении конкурсная тема об оценке $E_n(|x|)$ была очень трудной. Валле Пуссен сначала сам пытался решить вопрос и опубликовал предварительные результаты. С.Н.Бернштейн дал исчерпывающий ответ и доказал, что существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} nE_n(|x|)=\mu,\ 0{,}278<\mu<0{,}286.$$

Интересно, что это всего-навсего побочный результат общего исследования С.Н.Бернштейна о наилучшем приближении функции в зависимости от ее дифференциальных свойств. Тем самым был заложен фундамент новой области, которую С.Н.Бернштейн назвал впоследствии «конструктивная теория функций». А мы теперь называем С.Н.Бернштейна создателем конструктивной теории функций. Выяснилось, что скорость убывания $E_n(f)$ при $n\to+\infty$ полностью определяет класс приближаемых функций. Например, чтобы функция f была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы при всех натуральных n выполнялись неравенства

$$E_n(f)<Aq^n\ \ (A>0,\ 0<q<1).$$

Аналогично, чтобы f имела на отрезке бесконечно много производных, необходимо и достаточно, чтобы при любом $p>0$

$$\lim_{n\to+\infty} n^pE_n(f)=0.$$

В результате С.Н.Бернштейн был удостоен премии Бельгийской академии; с трудом защитил по этой теме докторскую диссертацию в Харьковском университете, потому что один из двух оппонентов дал о работе отрицательный отзыв; наконец, был приглашен сделать часовой доклад на Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 году. По уставу этих конгрессов чести сделать часовой доклад можно удостоиться лишь один раз в жизни; С.Н.Бернштейну было 32 года. В этом докладе он, в частности, сказал: «Пример задачи о наилучшем приближении $|x|$, предложенной Валле Пуссеном, дает еще одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий». Эту мысль о роли проблем я не раз слышал от него на семинаре и в частных беседах.

Что касается метода, созданного С.Н.Бернштейном, то он представлял собой глубокий синтез идей Чебышёва и Вейерштрасса, а также основывался на получении точных неравенств и их тонкого применения.

Мы уже несколько раз упоминали фундаментальную теорему Вейерштрасса. Важны не только сами теоремы, но и их доказательства. Вместе они существенно влияют на развитие математики. Бернштейн, который вел тогда исследования по теории приближений, уже несколько лет преподавал теорию вероятностей и под ее влиянием изобрел следующую изящную конструкцию многочленов

$$B_nf = \\ =B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k},$$

которые теперь называются многочленами Бернштейна. Многочлены B_nf и есть в явном виде последовательность, фигурирующая в теореме Вейерштрасса для функции f, непрерывной на отрезке $[0,1]$. То, что $\left\|B_nf-f\right\|\to 0$ при $n\to+\infty$, С.Н.Бернштейн очень просто вывел при помощи закона больших чисел, но это легко доказывается и средствами математического анализа.

Тем временем С.Н.Бернштейн уже начал углубляться в размышления над основами теории вероятностей. Хотя ее история насчитывала уже почти 300 лет, ей были присущи черты экспериментальной науки с интуитивными и размытыми пояснениями случайного события и его вероятности, что нередко приводило к ошибочным применениям и математическим парадоксам. Кое-кто сомневался даже в том, существуют ли в реальном мире случайные события; другие полагали, что шанс наступления случайного события оценивается каждым весьма субъективно. Мы уверены, что случайные события существуют. Например, в детстве бежишь по школьному коридору, сломя голову, и налетаешь на директора; извиняешься, говоришь: «Я случайно». Уж, конечно, не умышленно, но вероятность, видно, не мала. Теория вероятностей была очень содержательной наукой, которая включала в себя много важных результатов, а также имела широкие приложения в астрономии, статистической механике и других разделах физики. Но строгая математическая теория имеет дело не непосредственно с явлениями материального мира, а с их идеаль-