частных производных — восходят к Эйлеру, к его статье, опубликованной в «Комментариях Петербургской академии наук» за 1734—35 годы. Эйлер жил тогда и трудился в Петербурге, было ему 27 лет. За истекшие с тех пор 260 лет появилось несметное число исследований в той и другой области, они продолжаются и в наши дни.

Возвратимся к 19-й проблеме и уточним вопрос. Если уравнение (1) эллиптического типа, а функция φ — аналитическая, то можно ли утверждать, что его решение $u = f(x,y)$ будет аналитической функцией? Для частного случая, уравнения потенциала, это было известно. Ответ С.Н.Бернштейна в целом был утвердительным, но при некоторых дополнительных ограничениях. Для того чтобы решить задачу, С.Н.Бернштейну пришлось создать новый метод, построить некоторые специальные ряды, которые автор назвал нормальными. Этой превосходной работой С.Н.Бернштейна тема не была исчерпана. Она дала ответ на конкретный вопрос, но, кроме того, сыграла роль первопроходческой и открыла дорогу другим исследователям.

Но почему так интересовались, окажется ли решение аналитической функцией? Дело вот в чем: если аналитическая функция задана в сколь угодно малой части области, то она полностью определена во всей области. Это порождало иллюзию, что лишь аналитические функции пригодны для описания законов природы, где, как предполагалось, каждое состояние полностью предопределено состоянием предыдущим. Но эта слишком общая мысль не оставляла никакого места для природных явлений, связанных со случайными процессами.

Решению 19-й проблемы С.Н.Бернштейн посвятил, как тогда говорили, мемуар (большую статью) и защитил его в 1904 году в качестве докторской диссертации в Парижском университете перед комиссией из Адамара, Пикара и Пуанкаре. На защите диссертанту полагалось быть во фраке — одежде старомодной, а потому комичной. К счастью, покупать его не пришлось: его давал напрокат университетский швейцар. На этот раз французские математики отнеслись к Сергею Натановичу дружелюбно и явно гордились, что молодой выпускник их университета был первым, кто решил проблему Гильберта. Остальные 22 проблемы еще не были даже атакованы. Диссертация начиналась словами: «Кажется, все математики и физики наших дней согласны, что область приложения математики не имеет иных границ, кроме границ самого знания». Так Сергей Натанович всегда и думал.

В 1905 году С.Н.Бернштейн вернулся в Россию, в Санкт-Петербург. Здесь, как он и предвидел, его ждали большие трудности. Иностранные дипломы не признавались: не было никакого международного соглашения. Можно было получить в Париже докторскую степень, но при этом дома, в России, формально не считаться даже имеющим высшее образование. Экзаменоваться за университет его все же не заставили, а магистерские экзамены сдавать пришлось. Это было трудно, так как программы были далеки от принятых во Франции и Германии. Постоянной работы не было, приходилось искать временные заработки. Не оставил ли Сергей Натанович перед лицом встретившихся препятствий свою научную работу? Нет, нет, ни в коем случае. Если так реагировать на жизненные невзгоды, то математикой не будешь заниматься никогда. За какую задачу приняться, было ясно. К 19-й проблеме примыкает 20-я проблема — по смыслу, разумеется, а не по номеру. Она касается так называемой задачи Дирихле и тоже об аналитических решениях. С.Н.Бернштейн успешно справился с проблемой, совершенствуя свои методы.

Так как получить работу и подать магистерскую диссертацию в Петербурге не удалось, то в 1908 году С.Н.Бернштейн переехал в Харьков, куда был приглашен преподавать теорию вероятностей на Высших женских курсах. Лет через 40 Сергей Натанович вспоминал, что это предложение его немало огорчило. Я не вполне правильно понял тогда причины этой досады и подумал, что речь шла только о большой затрате времени на подготовку к лекциям. Но позднее я осознал, что он в большей мере имел в виду другое, а именно, он склонен был верить, что законы природы написаны на языке аналитических функций, а роль случайных событий тогда еще не особенно ценил. Так или иначе, но это был перст судьбы. Ему предстояло сделать решающий шаг в развитии теории вероятностей — создать ее аксиоматику и превратить ее в строгую математическую науку. Это было еще далеко впереди, а в тот момент Сергей Натанович своего предназначения не мог сознавать и предчувствовать.

По приезде в Харьков С.Н.Бернштейн защитил магистерскую диссертацию, в которую включил решение двух проблем Гильберта — 19-й и 20-й. Это был уникальный в мире случай, чтобы диссертация на первую научную степень содержала решение двух знаменитых проблем.

Вскоре С.Н.Бернштейн оставил дифференциальные уравнения и начал заниматься приближением функций. Одновременно над двумя темами Сергей Натанович никогда не работал — это противоречило его принципу полного погружения в проблему и максимальной сосредоточенности. Его внимание было привлечено задачей о наилучшем приближении функции $f(x) = |x|$ многочленами. По инициативе выдающегося бельгийского математика Валле Пуссена Королевская академия наук Бельгии в 1910 году объявила конкурс на решение этой проблемы. Нетрудно объяснить историю вопроса, термины и плодотворную роль проблемы. В середине прошлого столетия П.Л.Чебышёв своими исследованиями шарнирных механизмов был приведен к следующей общей задаче: приблизить непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию f наилучшим образом многочленом $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ данной степени n. Под отклонением P_n от f Чебышёв понимал

$$\max_x |P_n(x) - f(x)| = \|P_n - f\|$$

(читается «норма $P_n - f$»). Приблизить наилучшим образом — это значит выбрать коэффициенты многочлена так, чтобы $\|P_n - f\|$ была минимальной. Этот минимум называется наилучшим приближением и обозначается $E_n(f)$. Многочлен, для которого этот минимум достигается, называется многочленом, наименее уклоняющимся от f, обозначим его $P_n^*(f,x)$. Простых формул для его вычисления нет. Чебышёв указал его замечательное характеристическое свойство: график разности $f(x)$ —