достигается при $\cos\varphi/2 = 2\sin\varphi/2$, т.е. при $\operatorname{tg}\varphi/2 = 1/2$. Можно подсчитать, что в этом случае пространственный угол конуса содержит $4\pi/5$ стерадианов.

Читатель, знакомый с понятиями многомерной геометрии, может задать вопрос о том, что будет в $n$-мерном пространстве. Входит ли число $\pi$ в формулы для объема $n$-мерного шара и величины его поверхности? Ответ удивителен: при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ в эти формулы входит (с некоторым рациональным коэффициентом) число $\pi^k$, т.е. объем шара равен $\lambda_n\pi^n r^n$, а величина поверхности сферы равна $\lambda_n n\pi^n r^{n-1}$, где $\lambda_n$ — некоторое рациональное число. Например, для четырехмерного пространства $\lambda_4 = 1/2$. Читатель, умеющий интегрировать и владеющий понятиями многомерной геометрии, может найти, что $\lambda_{2m} = 1/m!$, а $\lambda_{2m+1} = 2^{m+1}/(1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2m+1))$.

## Что такое экстремум?

Рассмотрим теперь скверик с более сложной системой дорожек, среди которых, кроме радиальных, есть дорожки в форме окружностей разных радиусов (рис.13). Какой путь, соединяющий точки $A$ и $B$, является наиболее коротким? Читатель теперь без труда сможет ответить на этот вопрос: если угол $AOB$ (не превосходящий развернутого) меньше двух радианов, то наиболее коротким является путь, состоящий из отрезка $AM$ и дуги $MB$ окружности. Если же угол $AOB$ больше двух радианов, то

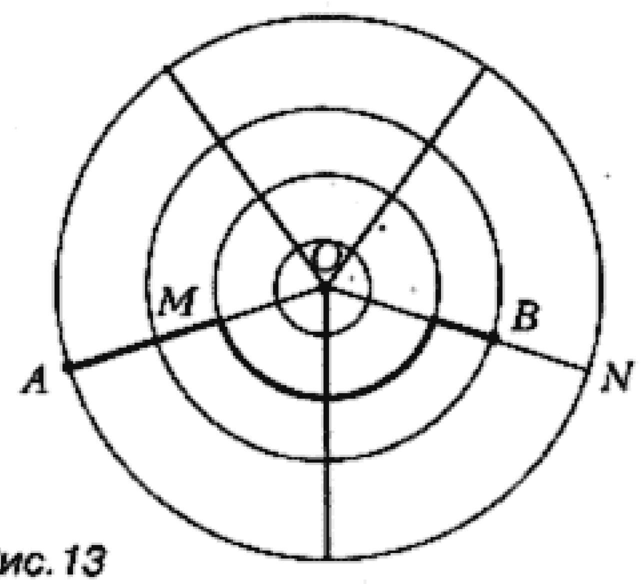


Рис. 13

наиболее коротким является радиальный путь $AOB$.

А теперь посмотрим на эту задачу с общей математической точки зрения. Мы имеем несколько различных путей в скверике, ведущих из точки $A$ в точку $B$ (среди них радиальный путь $AOB$ и различные пути, включающие дуги окружностей, например путь, вычерченный жирной линией на рисунке 13). Иными словами, мы имеем некоторое множество путей, ведущих из $A$ в $B$. Обозначим это множество через $S$. Каждому пути $x$ (т.е. каждому элементу $x \in S$) сопоставлена его длина, которую обозначим через $l(x)$. Таким образом, на множестве $S$ задана функция $l(x)$. Рассмотренная задача о дорожках состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции $l(x)$, заданной на множестве $S$.

Наименьшее и наибольшее значения функции называют ее экстремальными значениями. Старшеклассники знают, что если задана числовая функция (определенная на некотором интервале и принимающая действительные значения) и если эта функция дифференцируема, то ее экстремальные значения можно найти, приравнивая нулю производную. В этом состоит теорема, принадлежащая Ферма — замечательному математику, внесшему большой вклад в развитие математического анализа и теории чисел.

Но современная математика рассматривает не только числовые функции, заданные на интервалах, но и функции, рассматриваемые на более сложных множествах. Например, множество (или, как говорят в этих случаях математики, «пространство») может состоять из различных траекторий ракет, производственных планов предприятий, выпуклых фигур, различных форм крыла и т.п. На таком пространстве рассматривается некоторая функция (расход горючего, объем производства, площадь, аэродинамическое сопротивление и т.п.). И задача состоит в том, чтобы найти экстремальные значения рассматриваемой функции, например наиболее выгодную траекторию полета ракеты с точки зрения минимального расхода горючего. Рассмотренная задача (схематически показанная на рисунке 13) тоже относится к числу экстремальных задач.

Современная математика состоит не только из геометрии, алгебры, анализа. Она насчитывает десятки различных направлений, и большинство разделов современной математики (как «чистой», теоретической математики, так и прикладной) связаны с решением тех или иных экстремальных задач.

# «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

* * *

На одной из своих лекций Давид Гильберт сказал:

— Каждый человек имеет некоторый определенный горизонт. Когда он сужается и становится бесконечно малым он превращается в точку. Тогда человек говорит: «Это моя точка зрения».

* * *

Интересный пример того, как можно использовать слова для количественного описания результатов измерений, был приведен профессором Чикагского университета Гейлом.

Профессор работал в лаборатории с одним своим студентом, и они не знали, под каким напряжением — 110 или 220 вольт — находились клеммы, к которым они должны были подключить аппаратуру. Студент собрался сбегать за вольтметром, но профессор посоветовал ему определить напряжение на ощупь. — Но ведь меня просто дернет, и все, — возразил студент. — Да, но если тут 110 вольт, то вы отскочите и воскликнете просто: «О, черт!», а если 220, то выражение будет покрепче.

Когда об этой истории я рассказал студентам, один из них заметил: «Сегодня утром я встретил одного малого, так он, наверное, как раз перед этим подключился к напряжению 440!»

* * *

Дирак любил потеоретизировать на самые различные темы. Однажды он высказал предположение, что существует оптимальное расстояние, на котором женское лицо выглядит привлекательнее всего: поскольку в двух предельных случаях — на нулевом и бесконечном расстоянии — «привлекательность обращается в нуль» (ничего не видно), то между этими пределами, естественно, должен существовать максимум.