жит 2π радианов (т.е. примерно 6,28 радианов), поскольку длина всей окружности равна $2\pi r$.

А теперь вернемся к задаче, рассмотренной в начале статьи. Если угол между двумя радиальными дорожками содержит α радианов, то длина дорожки, идущей по окружности, равна αr. Длина же дорожки, идущей через центр, равна $2r$. Значит, при $\alpha r < 2r$ выгоднее идти по дуге окружности. Итак, если угол между радиальными дорожками меньше двух радианов (что составляет $\approx 114°$), то дорожка, идущая через центр, менее выгодна.

Площадь сектора круга

Рассмотрим сектор круга с центральным углом α (радианов) и вписанный в него равнобедренный треугольник (рис.9). Основание и высоту

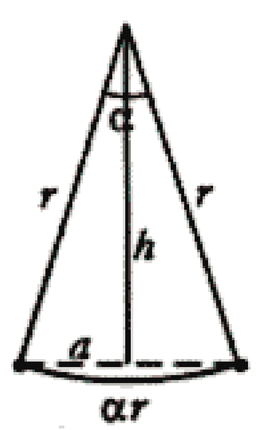

Рис. 9

треугольника обозначим через a и h соответственно. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}ah$. Если угол α мал, то $h \approx r$ и $a \approx l = \alpha r$. Поэтому площадь треугольника примерно равна $\frac{1}{2}\alpha r \cdot r = \frac{\alpha}{2}r^2$. Значит, если мы рассмотрим вписанный в круг правильный n-угольник (рис.10), то мы получим n таких треугольников, и в каждом из них центральный угол равен $\alpha = 2\pi/n$. Площадь всего многоугольника примерно равна

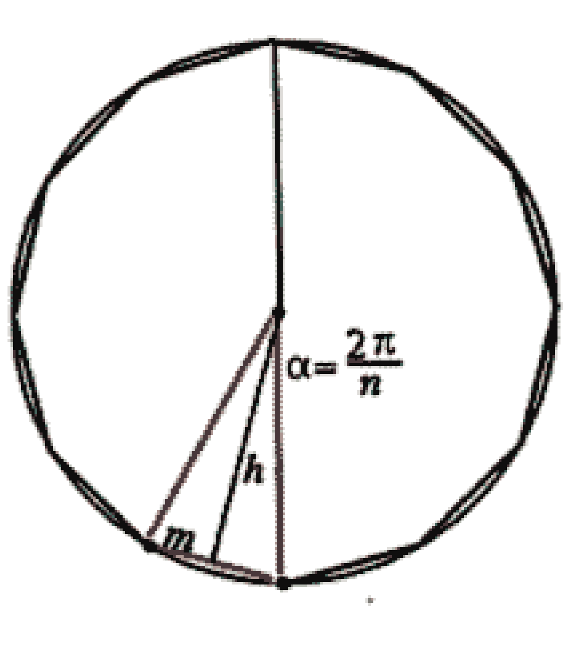

Рис.10

$$n \cdot \frac{1}{2}\alpha r \cdot r = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} r \cdot r = \pi r^2.$$

Но чем больше n, тем точнее площадь правильного вписанного многоугольника совпадает с площадью круга. А так как при любом n площадь многоугольника примерно равна одной и той же величине πr^2, то площадь круга *точно* равна πr^2.

Круг можно рассматривать как сектор, у которого центральный угол содержит 2π (радианов). Так как площадь круга равна πr^2, то (из соображений пропорциональности) площадь сектора с центральным углом α радианов равна

$$s = \frac{\alpha}{2}r^2. \qquad (3)$$

Вернемся теперь к нашим дорожкам и рассмотрим случай, когда оба пути (по дуге окружности или по двум радиусам) имеют одинаковую длину $2r$. Это будет в том случае, когда радиальные дорожки составляют между собой угол 2 радиана (т.е. примерно 114°). Значит, площадь сектора (рис.11), заключенного между обеими дорожками, согласно формуле (3) равна r^2, т.е. этот сектор равновелик квадрату со стороной r.

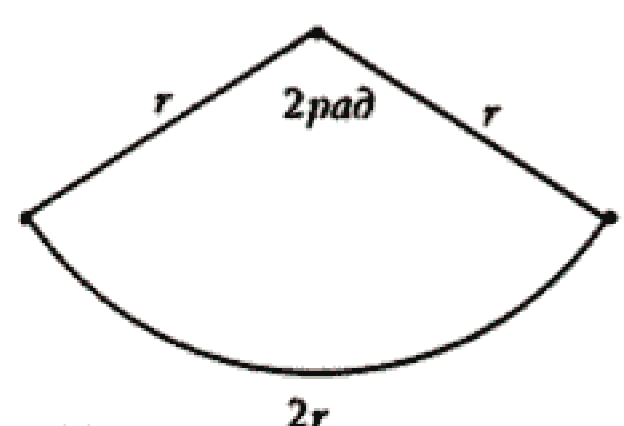

Рис.11

Таким образом, решение задачи о дорожках можно сформулировать еще и следующим образом: рассмотрим фигуру F (меньшую полукруга), которая заключена между двумя дорожками (одна дорожка идет по двум радиусам, другая – по дуге окружности); если площадь фигуры F меньше r^2, то более короткой является дорожка, идущая по дуге окружности, а если эта площадь больше r^2, то выгоднее идти по двум радиусам.

Перейдем в пространство

Обратил ли читатель внимание на замечательный факт: и в формуле (2), выражающей длину дуги окружности, и в формуле (3), дающей площадь сектора круга, присутствует одно и то же число π?

Более того, это же число π присутствует и в формулах пространственной геометрии. Старшеклассники знают, что площадь поверхности сферы с радиусом r равна $4\pi r^2$, а объем ограниченного ею шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Можно рассмотреть и пространственный аналог задачи о дорожках. Именно, рассмотрим конус с вершиной в центре шара. В пересечении с шаром он дает тело (рис.12), поверх-

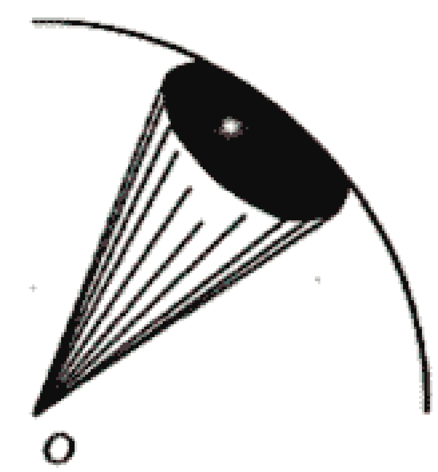

Рис.12

ность которого состоит из двух частей: боковой поверхности конуса и сферической «шапочки» (сравните с рисунком 6, где сектор есть пересечение угла и круга). Какая из этих двух частей имеет большую площадь поверхности? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо условиться о том, как измерять пространственные углы. Условимся говорить, что конус с вершиной в центре шара содержит пространственный угол, который имеет величину S/r^2 *стерадианов*, где S – площадь поверхности той сферической «шапочки», которую высекает конус из сферы. Таким образом, полный пространственный угол вокруг точки O содержит 4π стерадианов. Можно доказать, что если угол между образующей и осью конуса равен φ, то этот конус содержит $2\pi(1 - \cos\varphi)$ стеррадианов.

Теперь ответ на поставленный выше вопрос ясен: боковая поверхность конуса имеет площадь $\pi r^2 \sin\varphi$, а сферическая «шапочка» имеет площадь $2\pi r^2(1 - \cos\varphi)$. Отношение этих площадей равно

$$\frac{\pi r^2 \sin\varphi}{2\pi r^2(1 - \cos\varphi)} = \frac{\cos\varphi/2}{2\sin\varphi/2}.$$

Если это отношение меньше единицы, то «более выгодной» (т.е. имеющей меньшую площадь) будет боковая поверхность конуса. Равенство