ник, вписанный в окружность с радиусом r (рис.3), имеет периметр немного меньший, чем длина этой ок-

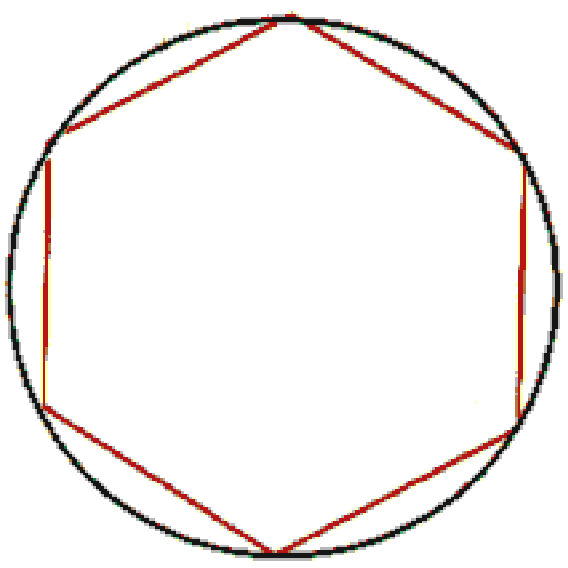

Рис. 3

ружности (вообще, выпуклая замкнутая линия L_1 имеет меньшую длину, чем длина «объемлющей» ее замкнутой выпуклой линии L_2, рис.4). А так как правильный шестиугольник име-

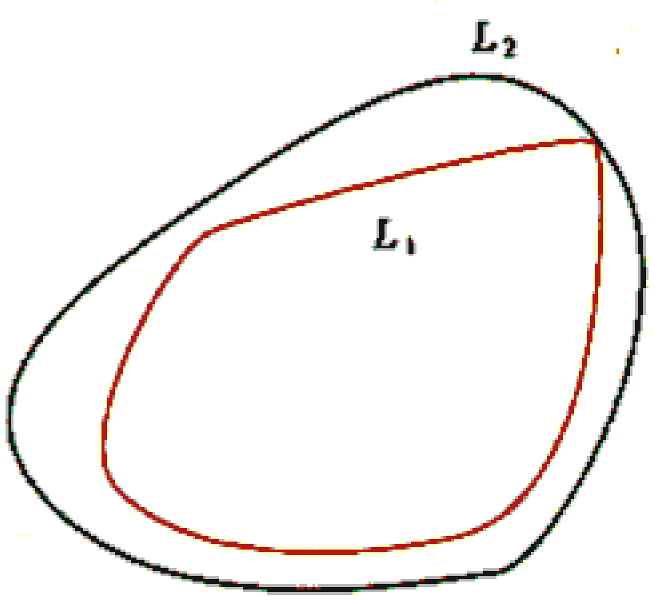

Рис. 4

ет периметр $6r$, то длина окружности с радиусом r несколько больше, чем $6r$, т.е. длина полуокружности несколько больше $3r$. Отношение длины полуокружности к ее радиусу обозначают буквой π, т.е. длина полуокружности равна πr, а длина всей окружности равна $2\pi r$.

Важно заметить, что число π — одно и то же для всех окружностей, т.е. оно не зависит от радиуса. Это

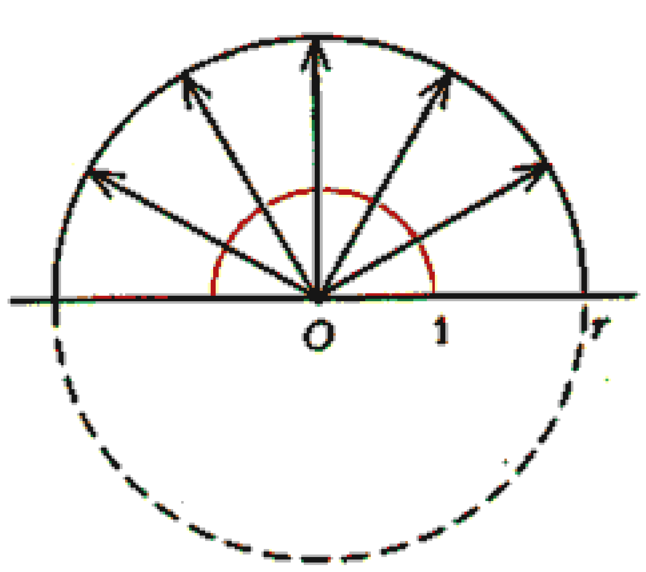

Рис. 5

можно пояснить следующим образом. Обозначим через π длину полуокружности радиусом 1. Полуокружность с радиусом r (с тем же центром O) получается из единичной полуокружности подобным преобразованием (гомотетией) с коэффициентом r (рис.5). Но при подобном преобразовании с коэффициентом r все длины увеличиваются в r раз. Поэтому длина полуокружности с радиусом r получается, если число π мы умножим на r, т.е. она равна πr. А длина всей окружности с радиусом r равна сумме длин двух полуокружностей, т.е. равна $2\pi r$.

Как мы видели, число π немного больше, чем 3. Великий древнегреческий ученый Архимед доказал, что число π заключается между

$$3\frac{1}{7} \approx 3{,}1429 \text{ и } 3\frac{10}{71} \approx 3{,}1409,$$

т.е. им было обосновано приближенное значение $\pi \approx 3{,}14$.

Как измерить длину окружности?

Будем рассматривать углы с вершиной в центре окружности. Полный угол содержит 360°, а длина всей окружности равна $2\pi r$. Из соображе-

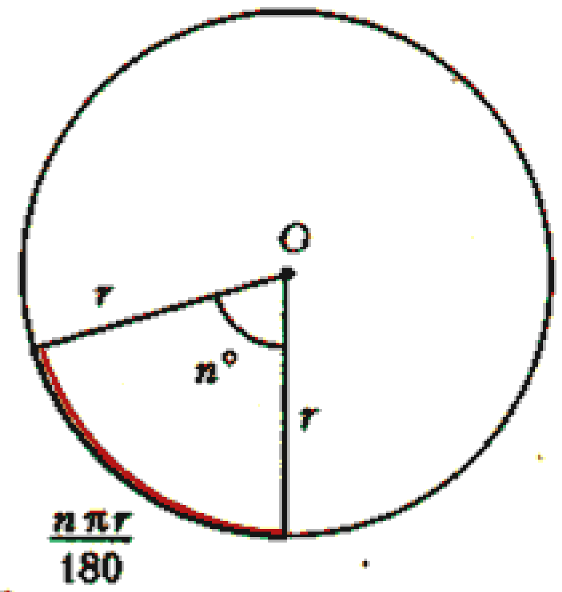

Рис.6

ний пропорциональности, центральный угол, содержащий n градусов, опирается на дугу, длина которой равна

$$l = \frac{n}{360} \cdot 2\pi r = \frac{n\pi r}{180} \qquad (1)$$

(рис.6). Разумеется, длина дуги получается вычисленной в тех же единицах длины, в которых измерен радиус.

В качестве несложной задачи рекомендуем проверить, что если угол измерен в градах (напомним, град — это сотая часть прямого угла), то длина дуги, на которую опирается угол, содержащий k градов, равна

$$l = \frac{k\pi r}{200}.$$

Конечно, можно измерять величины углов не только в градусах (или в градах), но и в других единицах. Наиболее удобной и часто применяемой единицей измерения углов является радиан. Он определяется следующим образом: длина дуги окруж-

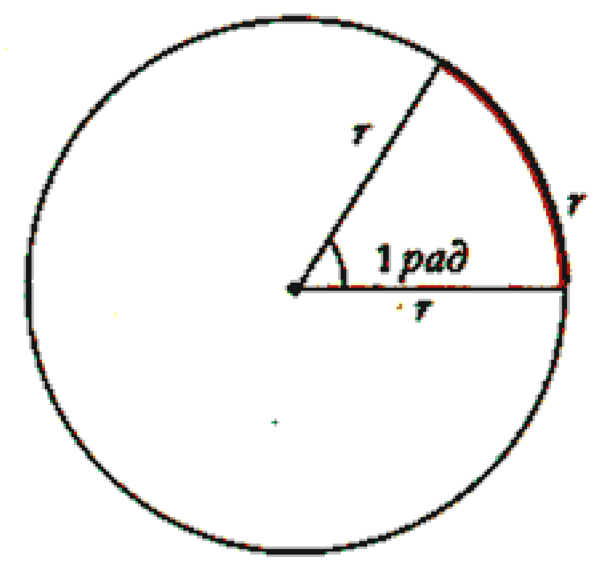

Рис. 7

ности, соответствующей центральному углу в 1 радиан, равна радиусу. А сколько же градусов содержит 1 радиан? По формуле (1) мы находим, что если длина дуги окружности равна радиусу (т.е. $l = r$), то $n = 180/\pi$ (градусов), т.е. 1 радиан содержит $180/\pi \approx 57$ градусов (рис.7). Таким образом, радиан немного меньше 60° (поскольку π немного больше трех).

Из определения радиана непосредственно следует, что центральный угол, содержащий α радианов, опирается на дугу окружности, длина которой равна αr, т.е. формула (1) заменяется следующей простой формулой (рис.8):

$$l = \alpha r. \qquad (2)$$

Именно простота этой формулы и является причиной, по которой углы наиболее удобно измерять в радианах. В частности, полный угол содер-

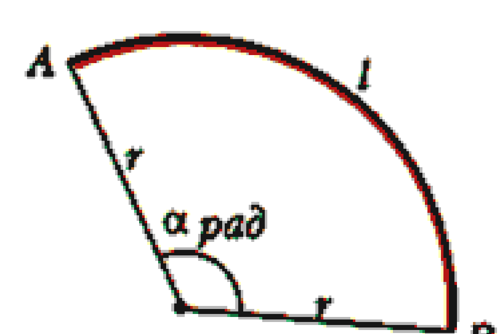

Рис. 8